Matrices

1 Dadas las siguientes matrices:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

hállese razonadamente la matriz B sabiendo que $BP=A$.

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba B. Cuestión 1)

2 Resolver la ecuación matricial $AX+B=A^2$ y determinar la matriz X, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

(Canarias. Junio 2006. Opción B. Cuestión 3)

3 Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}$. Calcúlese el determinante de A sabiendo que $A^2-2A+Id=0$, donde Id es la matriz identidad y 0 es la matriz nula.

(Castilla y León. Septiembre 2005. Prueba A. Cuestión 1)

4 Sean las matrices $B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}13 & 8\\ 8 & 5\end{pmatrix}$. Calcula la matriz A, sabiendo que $A^2=B$ y $A^3=C$.

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba A. Cuestión 3)

5 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}6 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtener razonadamente todos los valores de α para los que $\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ es la única solución de la ecuación matricial $AX=\alpha X$.

b) Resolver la ecuación matricial $AX=2X$.

(C. Valenciana. Septiembre 2007. Bloque 1. Problema 2)

6 Sean A, B e I las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}6 & -3 & -4\\ -3 & 2 & 1\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Estudiar si existe algún valor de $\lambda\in\mathbb{R}$ para el cual se satisfaga $(A-\lambda I)^2=B$.

(Aragón. Junio 2008. Bloque 1. Opción A)

7 Calcula todas las matrices A tales que $A\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot A$.

De estas matrices, determina las que tienen la suma de todos sus elementos igual a 0.

(Baleares. Septiembre 2004. Opción B. Cuestión 4)

8 Determina todas las matrices X tales que $AX=XA$, donde $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

(Extremadura. Junio 2004. Repertorio A. Ejercicio 4)

9 Hállense las matrices A cuadradas de orden 2, que verifican la igualdad: $A\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot A$.

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba A. Cuestión 1)

10 a) Sean A, B y C tres matrices tales que su producto ABC es una matriz 3×2 y el producto AC^t es una matriz cuadrada, siendo C^t la traspuesta de C. Calcula, razonando la respuesta, las dimensiones de A, B y C.

b) Dada $M=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, obtén todas las matrices X que conmutan con M, es decir, verifican $XM=MX$.

c) Calcula la matriz Y que verifica $MY+M^{-1}Y=I$, siendo M la matriz dada en b), M^{-1} la matriz inversa de M e I la matriz unidad de orden 2.

(Galicia. Septiembre 2006. Bloque 1. Opción 1)

11 Responde si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifica tu respuesta.

a) Si A y B son dos matrices cuadradas cualesquiera, se cumple que $(A+B)^2=A^2+B^2+2AB$.

b) Si A es una matriz cuadrada que cumple $A^2=0$, entonces tiene que ser $A=0$.

c) Si A es una matriz cuadrada cualquiera, se cumple que $(A+I)(A-I)=A^2-I$.

Nota: 0 representa la matriz nula de la misma dimensión que A. Análogamente I representa la matriz identidad.

(Cantabria. Junio 2005. Bloque 2. Opción A)

Determinantes

12 Probar que $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$.

(Aragón. Septiembre 2008. Bloque 1. Opción B)

13 Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=1$, determinar el valor de $\begin{vmatrix}x & \frac{1}{4} & 4\\ y & 0 & 4\\ z & \frac{1}{2} & 12\end{vmatrix}$.

(Aragón. Junio 2008. Bloque 1. Opción A)