10 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x^2+2x-5)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^4+3x^3-7x^2-2x+9)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^5-4x^3-x+4)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^6+3x^3-3x+7)$

11 Calcula el límite de las funciones de la actividad anterior cuando $x\to-\infty$.

12 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^3+3x-3}{x^2+5x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3-5x)^2}{-9x^2-x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3x^2+7x-8}{x^4-4x^2+6}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2+5x-1}{3-5x}$

Solución: *a)* $-\infty$ *b)* $\dfrac{-25}{9}$ *c)* 0 *d)* $+\infty$

13 Calcula el límite de las funciones de la actividad anterior cuando $x\to-\infty$.

Solución: *a)* $+\infty$ *b)* $\dfrac{-25}{9}$ *c)* 0 *d)* $-\infty$

14 Calcula los límites de las siguientes funciones.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+4}-\sqrt{3x^2-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{3x-2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x-5}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+4x}-4x\right)$

Solución: *a)* 0 *b)* $-\infty$ *c)* $\nexists$ límite *d)* 0 *e)* $\dfrac{1}{2}$

15 Calcula el límite de las funciones de la actividad anterior cuando $x\to-\infty$.

Solución: *a)* $+\infty$ *b)* $+\infty$ *c)* $\nexists$ límite *d)* $\nexists$ límite *e)* $+\infty$

16 Calcula los límites de las siguientes funciones.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{\frac{3x}{x^2-1}}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{\frac{3x}{x^2-1}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{5x-3}\right)^{-x+3}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{5x-3}\right)^{-x+3}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+5}-\dfrac{x^2+2}{x-5}\right)$

Solución: *a)* 1 *b)* 1 *c)* $+\infty$ *d)* 0 *e)* -10

17 Calcula los límites de las siguientes funciones.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{x}{9-x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{3x+x^2}{2x+1}\right)\right]$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{x+3}{3-2x^2}\right)^{-x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2+4x+4}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2+4x+4}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2-1}}{3x}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2-1}}{3x}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{2x}}$

Solución: *a)* $-\dfrac{1}{2}$ *b)* 0 *c)* -2 *d)* $-\infty$ *e)* $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ *f)* $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ *g)* [illegible]

Límites de funciones en punto

18 Halla los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x-1 & \text{si } x<0\\ (x-1)^2+2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ en $x=0$ y en $x=3$

b) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^2-4x+4}$ en $x=2$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-3x}{x} & \text{si } x<1\\ \dfrac{-x-1}{x} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ en $x=0$ y en $x=1$

d) $\lim\limits_{x\to-1^-}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

Solución: *a)* $\nexists\lim\limits_{x\to0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to3}f(x)=6$ *b)* $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$ *c)* $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=-2$ *d)* $+\infty$

19 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x^2-x+1}{1-x}$

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-2x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3}{(x+1)^3}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^5-x^3}{x^6}$

e) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^2-x-2}$

Solución: *a)* 1 *b)* ∞ *c)* ∞ *d)* ∞ *e)* 0

20 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$

b) $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{6x^3 + 3x^2 - 3x}$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 9}{2x + 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + x}$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x^2 + 4x}{x^2 + 2x - 1}$

f) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-x^3 + 2x}{x^3 - 2x^2 - 3x}$

g) $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{4x^2 - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}$

Solución: *a)* ∞ *b)* $-\dfrac{1}{3}$ *c)* $\dfrac{5}{3}$ *d)* 1 *e)* -8 *f)* ∞ *g)* $\dfrac{8}{5}$

21 Calcula los siguientes límites en los puntos que se indican.

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{\frac{1}{x^2}}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{-\frac{1}{x^2}}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{-\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} (2x + 1/3)^{\frac{1}{x-2}}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 1)^{-x+1}$

Solución: *a)* $+\infty$ *b)* 0 *c), d)* y *e)* $\nexists$ límite *f)* 1

22 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{3x}{x^2 - 1}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{3}{x + 1} - \dfrac{2x + 2}{x^2 - 1}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{1}{x^2 - 1} - \dfrac{2}{x + 1}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x + 1}{x - 1} - \dfrac{x + 1}{x^2 - x}\right)$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{x + 3}{x + 2} - \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{1}{x}\right)$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x - 1}{3x - 2} - \dfrac{1}{x}\right)$

Solución: *a)* ∞ *b)* ∞ *c)* ∞ *d)* 2 *e)* ∞ *f)* ∞ *g)* -2

23 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{\dfrac{x^2 - 9}{4x - 12}}$

c) $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 4}}$

d) $\lim\limits_{x \to -2^+} \sqrt{\dfrac{x + 2}{x^2 - 4}}$

Solución: *a)* 2 *b)* $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ *c)* 0 *d)* $+\infty$

24 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{x^3 - 2x}{x^2 - 3x - 1}\right)^{2x + 5}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 + 3x + 1)^{\frac{-5}{(x-2)^2}}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}\right)^{x - 2}$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{2x + 2}{x}\right)^{\frac{-1}{x+2}}$

Solución: *a)* 1/27 *b)* 0 *c)* $+\infty$ *d)* $\sqrt{e}$

Asíntotas

25 Indica el dominio de las funciones de los ejercicios 8 y 9, y calcula analíticamente las asíntotas horizontales y verticales de las funciones representadas, en caso de que las tengan.

26 Determina la ecuación de todas las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - x}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{(4 - x)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x^2 + 5}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 3x + 2}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Continuidad de funciones

27 Considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Dibuja la gráfica.

b) Estudia la continuidad.

28 Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x+2}{x^4 - x^3 - 2x^2}$$

a) Halla el límite en $x \to -1$, en $x \to 2$ y en $x \to 0$.

b) Estudia su continuidad y clasifica sus discontinuidades.

c) Indica qué valor debería tomar $f(x)$ en $x = -1$ para evitar la discontinuidad.

d) Indica sus asíntotas.

e) Estudia su signo.

29 Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x < 4 \\ -x + 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

a) Represéntala.

b) Clasifica sus discontinuidades, si las tuviera.

30 Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq -2 \\ |x-1| & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ \dfrac{1-x}{x} - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Estudia su continuidad y clasifica sus discontinuidades.

31 Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudia su continuidad y clasifica sus discontinuidades.

32 Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = 2^{\frac{1}{2-x}}$$

Clasifica sus discontinuidades.

33 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

determina a para que la función sea continua en todo su dominio.

Solución: $a = -1$

34 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+b}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{4}{x-2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{x^2+1}{ax} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Determina a y b para la función sea continua en todo su dominio.

Solución: $a = -\frac{1}{2}$ $b = 2$

Ejercicios de aplicación

35 En los seis primeros meses, desde que abrió, una librería ha ido anotando el número de compradores de cada mes. Este número $N(x)$ se puede ajustar por la función

$$N(x) = \frac{1\,000x - 600}{x}$$

siendo x el número del mes contado desde que abrió.

a) ¿Cuántos compradores tuvo en el segundo mes? ¿En qué mes contado desde la apertura tuvo 900 compradores?

b) Supongamos que esta fórmula sirve para predecir el número de compradores en el futuro, ¿podemos asegurar que este número siempre irá creciendo? Explica razonadamente tu respuesta.

Solución: *a)* 700 compradores. Sexto mes

36 Tras un estudio demográfico se ha determinado que el número de habitantes de cierta población en los próximos años, vendrá dado por la función:

$$N(x) = \frac{14\,750x + 3\,750}{2x + 1}$$

a) ¿Cuál es la población actualmente? (año $x = 0$)

b) ¿Cuál será la población dentro de dos años?

c) ¿Y dentro de tres años?

d) Si se supone que el comportamiento de la población es siempre el mismo, ¿la población crecería indefinidamente o, por el contrario, se estabilizaría? Y si así fuera, ¿en qué valor?

Solución: *a)* 3 750 habitantes *b)* 6 650 habitantes *c)* 6 857 habitantes *d)* 7 375 habitantes

37 En un cuadrado de lado 1, se unen los puntos medios de los lados y se forma otro cuadrado, del cual se unen los puntos medios de los lados y se forma otro cuadrado, y así sucesivamente. Calcula la suma de las áreas de todos los cuadrados así formados.

Solución: 2

38 Representa gráficamente funciones que cumplan las siguientes condiciones.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$,

$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$,

$f(0) = 0$, $f(x) < 0$ si $x < 0$, $f(x) > 0$ si $x > 0$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Rec } f = [-1, 0) \cup \{2\}$,

$f(1) = -1$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -1$,

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$,

$\lim_{x \to 3} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$,

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -2} f(x) = +\infty$,

$\lim_{x \to +3} f(x) = \infty$

e) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, -1\}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$,

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$,

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$