TEMA 6. 2º BACH A

1. Determina las ecuaciones de la recta proyección de $r: \frac{1-x}{-2} = 2 - y = \frac{z}{3}$ sobre el plano π: x+2y+2z-18 = 0 y calcula el ángulo que forma la recta y el plano.

2. Determina la posición relativa de las rectas $r: \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x - 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$.

Si son secantes, calcular el punto de corte y si se cruzan la perpendicular común. Calcula la distancia mínima entre ellas.

3. Dada la recta $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 - 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$ y el plano $\pi: 3x - y + 2z = 0$.

   a) Determina las ecuaciones de la recta simétrica de r respecto de π.
   b) Determina el simétrico del punto P(-3,2,4) respecto de la recta r.
   c) Determina el simétrico del punto P(-1,0,-2) respecto del plano π.

4. Halla la ecuación general del plano que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (-3,0,0); (0,-2,0); (0,0,5). Calcula los puntos de la recta r: $\frac{2x-1}{3} = y - 3 = z$, que están a distancia 10 de este plano.

5. Sean las rectas:

$$r: 2x = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{2} \qquad s: \begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 \\ x - z - 6 = 0 \end{cases}$$

Halla la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s. Calcula la distancia del plano a la recta s

TEMA 6. 2º BACH A

(1) $r: \frac{1-x}{-2} = 2-y = \frac{z}{3}$, $\pi: x+2y+2z-18=0$

$r: \frac{1-x}{-2} = 2-y = \frac{z}{3} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3} \rightarrow \vec{v_r}\,(2,-1,3) \quad R(1,2,0)$

$\pi: x+2y+2z-18=0 \rightarrow \vec{n}\,(1,2,2)$

Se calcula un plano π' con $R, \vec{v_r}$ y $\vec{n}$

$$\pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi': -8(x-1) - 1(y-2) + 5z = 0$$

$$\pi': -8x - y + 5z + 10 = 0$$

La recta que es proyección ortogonal será

$$s: \begin{cases} x+2y+2z-18=0 \\ 8x+y-5z-10=0 \end{cases}$$

$$\cos(\widehat{r,\pi}) = \cos(\widehat{\vec{v_r},\vec{n}}) = \frac{|\vec{v_r}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v_r}||\vec{n}|} = \frac{|(2,-1,3)(1,2,2)|}{\sqrt{4+1+9}\ \sqrt{1+4+4}} = \frac{6}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{9}} = \frac{6}{3\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$\beta = 57{,}69^\circ$

$\alpha = 90^\circ - 57{,}69^\circ = 32{,}31^\circ$

(2) $r: \begin{cases} x-2y+1=0 \\ y-z-1=0 \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} x-2z=5 \\ x-y-z=1 \end{cases}$

$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2,1,1)$ $\qquad \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,-1,-1)$

$R(-1,0,-1)$ $\qquad S(5,4,0)$

$\vec{RS}(6,4,1)$

$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ Son paralelas o coincidentes, para determinarlo comprobar si $R \overset{?}{\in} s$

$R \overset{?}{\in} s \rightarrow -1+2\cdot = 1 \neq 5$ Luego $R \notin s \Rightarrow r$ y s son paralelas

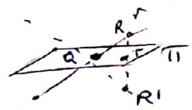
$$d(r,s) = d(R,s) = \frac{|\vec{RS} \times \vec{v_r}|}{|\vec{v_s}|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{|(3,-4,-2)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{174}}{6}\ u$$

(3) $r: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -3-2\lambda \\ z = 1+3\lambda \end{cases}$ $\quad \pi: 3x - y + 2z = 0$

a) $\vec{v_r}(1,-2,3)$ $\quad \vec{v_r}\cdot\vec{n} = (1,-2,3)(3,-1,2) = 3+2+6 = 11 \neq 0$ son secantes

$\vec{n}(3,-1,2)$ $\quad$ Calculamos el punto de corte de r y π, Q

y luego la recta que pase por Q y R'



$3(2+\lambda) - (-3-2\lambda) + 2(1+3\lambda) = 0 \Rightarrow 6+3\lambda+3+2\lambda+2+6\lambda = 0 \Rightarrow 11\lambda + 11 = 0 \rightarrow \lambda = -1$

$Q(1,-1,-2)$

$R(2,-3,1)$ calculamos su simétrico respecto de π

$\vec{n}(3,-1,2) = \vec{v_s}$ $\quad s: \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = -3-\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$

$3(2+3\lambda) - (-3-\lambda) + 2(1+2\lambda) = 0 \Rightarrow 6+9\lambda+3+\lambda+2+4\lambda = 0 \rightarrow 14\lambda + 11 = 0 \quad \lambda = -\frac{11}{14}$

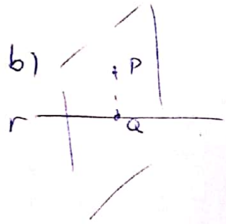
$T = \left(-\frac{5}{14}, \frac{-31}{14}, \frac{-8}{14}\right)$

Luego $\left(\frac{-5}{14}, \frac{-31}{14}, \frac{-8}{14}\right) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y-3}{2}, \frac{z+1}{2}\right) \rightarrow R'\left(-\frac{19}{7}, -\frac{10}{7}, -\frac{15}{7}\right)$

La recta simétrica es s: , $\vec{v_s} = (\vec{QR'}) = \left(-\frac{26}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-1}{7}\right)$

$s: \begin{cases} x = 1 - \frac{26}{7}\lambda \\ y = -1 - \frac{3}{7}\lambda \\ z = -2 - \frac{1}{7}\lambda \end{cases}$

b)



$\vec{v_r}(1,-2,3) = \vec{n}$ $\quad x - 2y + 3z + D = 0$

$P(-3,2,4)$ $\quad -3-4+12+D = 0 \rightarrow D = -5 \Rightarrow x - 2y + 3z - 5 = 0$

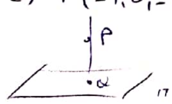
$(2+\lambda) - 2(-3-2\lambda) + 3(1+3\lambda) - 5 = 0$

$2+\lambda+6+4\lambda+3+9\lambda-5 = 0 \Rightarrow 14\lambda + 6 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-6}{14}$

$Q\left(\frac{11}{7}, \frac{-15}{7}, \frac{-2}{7}\right) \Rightarrow \left(\frac{11}{7}, \frac{-15}{7}, \frac{-2}{7}\right) = \left(\frac{x-3}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+4}{2}\right)$

$P'\left(\frac{43}{7}, \frac{-44}{7}, -\frac{32}{7}\right)$

c) $P(-1,0,-2)$



$\vec{n}(3,-1,2) = \vec{v_s}$ $\quad s: \begin{cases} x = -1+3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2+2\lambda \end{cases}$

$3(-1+3\lambda) - (-\lambda) + 2(-2+2\lambda) = 0 \Rightarrow -3+9\lambda+\lambda-4+4\lambda = 0 \rightarrow 14\lambda - 7 = 0$

$\rightarrow \lambda = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$ $\quad Q\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z-2}{2}\right)$

$P'(2, -1, 0)$

(4) $A(-3,0,0)$ $B(0,-2,0)$ $C(0,0,5)$

$\vec{AB}(3,-2,0)$ $\vec{AC}(3,0,5)$

$\pi: \begin{vmatrix} x+3 & y & z \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -10(x+3) - 15y + 6z = 0$

$-10x - 15y + 6z - 30 = 0$

$\boxed{\pi: 10x + 15y - 6z + 30 = 0}$

$r: \frac{2x-1}{3} = y-3 = z \Rightarrow \frac{x-1/2}{3/2} = y-3 = z \Rightarrow r: \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $R\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\lambda, 3+\lambda, \lambda\right)$

$d(R,\pi) = \frac{\left|10\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\lambda\right) + 15\cdot(3+\lambda) - 6\cdot\lambda + 30\right|}{\sqrt{10^2+15^2+(-6)^2}} = 10$

$|5 + 15\lambda + 45 + 15\lambda - 6\lambda + 30| = 10 \cdot 19 \Rightarrow |24\lambda + 80| = 190$

$24\lambda + 80 = 190 \longrightarrow \lambda = \frac{55}{12} \Rightarrow P_1\left(\frac{59}{8}, \frac{91}{12}, \frac{55}{12}\right)$

$24\lambda + 80 = -190 \longrightarrow \lambda = -\frac{45}{4} \Rightarrow P_2\left(-\frac{131}{8}, -\frac{33}{4}, -\frac{45}{4}\right)$

(5) $r: 2x = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{2} \Rightarrow \frac{x}{1/2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{2}$ $\vec{v_r}\left(\frac{1}{2}, -1, 2\right)$ $R(0,1,-3)$

$s: \begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 \\ x - z - 6 = 0 \end{cases}$ $\vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \vec{v_s}(2,3,2)$ $S(0,-2,-6)$

$\pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z+3 \\ 1/2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8x + 3(y-1) + \frac{7}{2}(z+3) = 0$

$-8x + 3y + \frac{7}{2}z + \frac{15}{2} = 0$

$-16x + 6y + 7z + 15 = 0$

$\boxed{\pi: 16x - 6y - 7z - 15 = 0}$

$d(\pi, s) = d(S,\pi) = \frac{|16\cdot 0 - 6(-2) - 7(-6) - 15|}{\sqrt{16^2 + (-6)^2 + (-7)^2}} = \frac{39}{\sqrt{341}} = 2{,}11\,u.$