Vectores

1 Calcula el extremo del vector $\vec{v}=(\sqrt{2},-1)$ si su origen es el punto $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}},4\right)$.

Solución: $B(3\sqrt{2}/2,3)$

2 Calcula las componentes y el módulo de los vectores.

a) $\vec{w}=-3\cdot\left(-\frac{1}{3},+3\right)+\sqrt{2}\left(\frac{2}{3\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

b) $\vec{w}=(5,\sqrt{3})-\sqrt{6}\cdot(1,-\sqrt{2})$

Solución: *a)* $\vec{w}=\left(\frac{5}{3},-\frac{25}{3}\right),|\vec{w}|=\frac{5\sqrt{26}}{3}$

b) $\vec{w}=(5-\sqrt{6},3\sqrt{3}),|\vec{w}|=5{,}79$

3 Calcula x e y para que se cumpla esta igualdad:

$$\frac{1}{3}\cdot(2x,3y-6)=(-2,12)-\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1-x}{4},0\right)$$

Solución: $x=-7, y=14$

4 Si $\vec{a}=(3,1/2)$, $\vec{b}=(-2/3,5)$ y $\vec{c}=(2,3)$, determina las siguientes combinaciones lineales.

a) $3\vec{a}-2(\vec{b}+\vec{c})$

b) $3(\vec{a}-\vec{b})+\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{c})$

Solución: *a)* $(19/3,-29/2)$ *b)* $(91/9,-77/6)$

5 Halla el valor de x e y si $\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}$, sabiendo que $\vec{a}=(-1,3)$, $\vec{b}=(7,5)$ y $\vec{v}=(5,-2)$.

Solución: $x=-3/2, y=1/2$

6 Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento AB en cuatro partes iguales, si $A(22,7)$ y $B(-6,5)$.

Solución: $M\left(15,\frac{13}{2}\right)$, $N(8,6)$ y $P\left(1,\frac{11}{2}\right)$

Dependencia lineal y bases

7 ¿Es el vector $\vec{v}=\left(2,-\frac{5}{7}\right)$ una combinación lineal del vector $\vec{u}=\left(-7,\frac{5}{2}\right)$? Expresa la respuesta enunciando la característica que los relaciona.

8 La combinación lineal de dos vectores paralelos, ¿es necesariamente otro vector paralelo a ellos?

9 ¿Es posible que dos vectores linealmente dependientes formen un ángulo de 180°? ¿Y un ángulo de 90°?

10 ¿Son los vectores $\vec{u}=(4,2)$ y $\vec{v}=(-2,-1)$ linealmente dependientes? ¿Son paralelos?

11 Los puntos $A(2,6)$, $B(5,8)$ y $C(17,m)$ están alineados. Calcula m.

Solución: $m=16$

12 Considera los puntos del plano $A(3,2)$, $B(-1,8)$ y $C(k,k+4)$ con $k\in\mathbb{R}$. Calcula el valor de k para que A, B y C estén alineados.

Solución: $k=1$

13 Expresa el vector $\vec{w}=(-3,4)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}=(-1,2)$ y $\vec{v}=(2,-3)$. Realiza la representación gráfica para comprobar el resultado.

Solución: $(-3,4)=-1(-1,2)-$ [illegible]

14 Di cuáles de los siguientes pares de vectores forman base.

a) $(-3,1)$ y $(\sqrt{3},-\sqrt{3}/3)$

b) $(-\sqrt{2},4)$ y $(-1/\sqrt{2},2/\sqrt{2})$

c) $(-5,1)$ y $(2\sqrt{5},-\sqrt{5})$

d) $(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$ y $(1,-7-4\sqrt{3})$

e) $(1/(\sqrt{5}+1),(\sqrt{5}-1)/4)$ y $(1,1)$

15 Dado el vector $\vec{v}=(3,-7)$, expresa el vector $\vec{v}$ en la base formada por los vectores $\vec{a}=(-1,1)$ y $\vec{b}=(2,-1)$.

Solución: $\vec{v}=$ [illegible]

Producto escalar

16 Calcula el producto escalar de dos vectores de módulos 3 y 4, respectivamente, que forman 60°.

Solución: [illegible]

17 Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u}=$ [illegible] y $\vec{v}=(3,4)$. Determina el ángulo que forman.

Solución: $7;\alpha=$ [illegible]

18 Calcula el ángulo que forman $\vec{v}=(3,4)$ y $\vec{w}=$ [illegible]

Solución: $\alpha=$ [illegible]

19 ¿Es posible que dos vectores cuyo producto escalar vale 3 formen un ángulo de 120°? Razona la respuesta.

20 Determina qué ángulos forman los siguientes pares de vectores.

a) $\vec{u}=(3,2)$ y $\vec{v}=(7,-1)$

b) $\vec{u}=(2-\sqrt{2},2/(2+\sqrt{2}))$ y $\vec{v}=(1,-1)$

c) $\vec{u}=(\sqrt{5}/2,-\sqrt{5})$ y $\vec{v}=(-1,2)$

Solución: *a)* $\alpha=41°\,49'\,12{,}61''$ *b)* $\alpha=90°$ *c)* $\alpha=$ [illegible]

21 Dado el vector $\vec{u}=(-5,2)$, determina cuáles de los siguientes vectores son paralelos y cuáles perpendiculares a dicho vector.

a) $\vec{v}=(5,-2)$ *c)* $\vec{m}=(-2,-5)$ *e)* $\vec{o}=(5/2,-1)$

b) $\vec{w}=(2,-5)$ *d)* $\vec{n}=(-4,-10)$ *f)* $\vec{p}=(1,5/2)$

22 Dados $A(3,0)$, $B(1,4)$, $C(-1,3)$ y $D(-1,-2)$, calcula el perímetro del cuadrilátero que determinan y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$.

Solución: $P=5\sqrt{5}+5;\alpha=$ [illegible]

23 Dados $\vec{a}=(2x,5)$ y $\vec{b}=(7,y)$, averigua los valores de x e y sabiendo que $\vec{a}$ se encuentra en el primer cuadrante, $|\vec{a}|=5\sqrt{5}$, y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares.

Solución: $x=5, y=-14$

24 Sabiendo que el vector $\vec{a}=(x,y)$ es perpendicular a $\vec{b}=(-3,2)$ y que el módulo de $\vec{a}$ es $2\sqrt{13}$, halla el valor de x e y.

Solución: $x=4, y=6; x=-4, y=-6$

25 Calcula a sabiendo que $\vec{u} = (a, 3)$ y $\vec{v} = \left(\sqrt{2}, 1\right)$ forman un ángulo de 30°.

Solución: $a = 12\sqrt{2} - 9\sqrt{3}$

26 Si $|\vec{a}| = 2$ y $|\vec{b}| = 3$, y $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, halla $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Solución: $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}$; $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{13}$

27 Sabiendo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo módulo y que $\vec{u} = (3x, y)$ y $\vec{v} = (2, -1)$, calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

Solución: 90°

28 Dados los vectores $\vec{v} = (7, 4)$ y $\vec{w} = (4, x)$, calcula x para que estos:

a) Sean perpendiculares.

b) Sean paralelos.

c) Formen un ángulo de 30°.

Solución: *a)* $x = -7$ *b)* $x = 16/7$ *c)* $x = 6{,}86; x = -0{,}02$

29 Halla la proyección ortogonal del vector $\vec{u} = (2, -1)$ sobre el vector $\vec{v} = (-3, 7)$.

Solución: $\text{proy}_{\vec{v}}(\vec{u}) = 13/\sqrt{58}$

30 Dado el vector $\vec{u} = (-3, 6)$, determina el módulo del producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, si sabemos que la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es 3.

Solución: $9\sqrt{5}$

31 Dados los puntos $A(7, 0)$, $B(4, 6)$ y $C(-1, -1)$, calcula las proyecciones de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$ y comprueba que la suma de ambas es igual al módulo de $\overrightarrow{AC}$.

Solución: $\text{proy}_{\overrightarrow{AC}}(AB) = 18/\sqrt{65}$; $\text{proy}_{\overrightarrow{CA}}(CB) = 47/\sqrt{65}$

Aplicaciones de los vectores

32 Dado el triángulo cuyos vértices son $A(-1, 0)$, $B(3, 3)$ y $C(1, -2)$, calcula:

a) La longitud del lado AB.

b) La longitud del lado AC.

c) El ángulo A.

d) El área del triángulo.

Solución: *a)* 5 u *b)* $2\sqrt{2}$ u *c)* 81° 52′ 11,63″ *d)* 7 u^2

33 Dado el triángulo de vértices $A(-3, 7)$, $B(5, 6)$ y $C(-2, 15)$, calcula el valor de su área y el ángulo A.

Solución: 32,5 u^2; 90°

34 Dado el triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(-3, 5)$ y $C(1, 3)$, calcula el valor de su área y el ángulo A.

Solución: 10 u^2; 45°

Ecuaciones de la recta

35 Determina si los siguientes puntos están alineados y, en el caso de que lo estén, averigua la ecuación de la recta a la que pertenecen.

a) $A(1, 6)$, $B(-2, 0)$ y $C(1/2, 5)$

b) $A(1, 2)$, $B(-3, 3)$ y $C(-1, 4)$

36 Calcula la ecuación de la recta que pasa por $A(3, 2)$ y $B(-6, 0)$. Exprésala de todas las formas posibles.

37 ¿Qué podrías decir acerca de una recta cuyo vector director es $(1, 1)$?

38 Si $A(2, 7)$, $B(8, -3)$ y $C(0, -10)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, determina las coordenadas del vértice D. A continuación, averigua las del punto en el que se cortan sus diagonales.

Solución: $D(-6, 0)$. Las diagonales se cortan en $M(1, -3/2)$

39 Los puntos $A(0, -2)$, $B(6, 0)$ y $C(3, 4)$ son tres vértices de un paralelogramo. Calcula el cuarto vértice y las ecuaciones de sus diagonales.

Solución: $D(-3, 2)$

40 Dada la recta $r: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = a - 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, halla el valor de a para que $(-4, 7)$ pertenezca a r.

Solución: $a = 4$

41 Calcula b para que la recta $x + by - 7 = 0$ pase por el punto de intersección de estas rectas:

$$r: (x, y) = (-7, 0) + \lambda(5, 1),\ s: \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha - 4 \end{cases}$$

Solución: $b = 2$

42 Dados los puntos del plano $A(2, -1)$ y $B(0, 3)$ y la recta r de ecuación $x + y - 2 = 0$, calcula las coordenadas de un punto C de la recta que esté alineado con A y B.

Solución: $C(1, 1)$

Posiciones relativas de rectas

43 Calcula la ecuación de una recta paralela a la de ecuación $3x - 2y + 5 = 0$ que pase por el punto $P(-1, 5)$. Exprésala en forma vectorial y paramétrica.

44 Sean r y s las dos rectas del plano de ecuaciones:

$$r: 2x - y - 3 = 0,\ s: \frac{x + 1}{4} = \frac{y + 2}{2}$$

Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de r y s, y es paralela a la recta de ecuación que pasa por los puntos $(2, -1)$ y $(-3, 2)$.

45 Calcula la ecuación de la recta perpendicular a la de ecuación $3x - 2y + 5 = 0$ que pase por el punto $P(-1, 5)$. Exprésala en forma continua y explícita.

46 Considera la recta de ecuación $y = -7x + 5$. Encuentra las coordenadas del punto de intersección de esta recta con la recta perpendicular a ella que pasa por $(-7, 5)$.

Solución: $P(-7/50, 299/50)$

47 Dadas las siguientes rectas:

$$r:\ 5x - y + 4 = 0,\ s: \begin{cases} x = -3 + m\lambda \\ y = 4 - \lambda \end{cases},\ \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

determina el valor de m para que las rectas r y s sean:

a) Paralelas.

b) Perpendiculares.

c) Coincidentes.

Solución: *a)* $m = -1/5$ *b)* $m = 5$ *c)* No pueden ser coincidentes.

48 Los puntos $A(1, 2)$ y $C(5, 4)$ representan los vértices opuestos de un cuadrado:

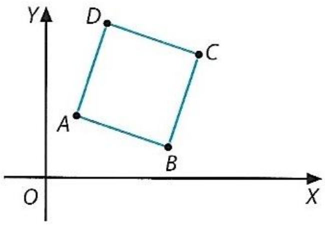

FIGURA 6.36.

a) Calcula el punto medio, M, de la diagonal, AC, del cuadrado (M será el centro del cuadrado).

b) Escribe la ecuación de la recta que pasa por M y es perpendicular a la diagonal AC.

c) Calcula las coordenadas de los otros dos vértices B y D del cuadrado.

Solución: *a)* $M(3, 3)$ *c)* $B(4, 1), D(2, 5)$

49 Explica la condición que han de verificar A y B si las rectas $Ax + By + C = 0$ y $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3}$:

a) Son perpendiculares.

b) Son paralelas.

50 Sea r la recta de ecuación $3x - 5y + 2 = 0$. Determina las ecuaciones de las rectas paralela y perpendicular a r que pasen por el punto $(-15, 4)$.

51 Dada la recta de ecuación $3x - 5y + 7 = 0$, determina la ecuación de la recta perpendicular que corta el eje de ordenadas en $y = 3$.

52 Determina el valor de a para que las rectas de ecuaciones $x - 5ay = 1$ y $2x + 3y = 1$ sean:

a) Paralelas. *b)* Perpendiculares.

Solución: *a)* $a = -3/10$ *b)* $a = 2/15$

53 Determina el valor de m para que $r: x - y + 4 = 0$ y $s: \begin{cases} x = 3 + m\lambda \\ y = 1 - 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ sean:

a) Paralelas. *b)* Perpendiculares.

Solución: *a)* $m = -4$ *b)* $m = 4$

54 Dadas $r: 2x + my - 7 = 0$ y $s: \begin{cases} x = -3 + 5\lambda \\ y = 7 + n\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$, sabiendo que s pasa por $P(13, 8)$, determina m y n en los siguientes casos:

a) Si r y s son paralelas.

b) Si r y s son perpendiculares.

Solución: *a)* $n = 5/16, m = -32$ *b)* $n = 5/16, m = 1/8$

55 De un rombo $ABCD$ conocemos las coordenadas de tres vértices: A es el origen de coordenadas, $B(4, 1)$ y $D(1, 4)$.

a) Calcula las coordenadas del cuarto vértice, C.

b) Comprueba, analíticamente, que las diagonales son perpendiculares y que se cortan en su punto medio.

Solución: *a)* $C(5, 5)$

56 Calcula las coordenadas del punto simétrico de $A(1/6, 1)$ respecto del punto $P(1, -4)$.

Solución: $A'(11/6, -9)$

57 Halla las coordenadas del punto simétrico al punto $P(2, 2)$ respecto de la recta $x - 2y - 5 = 0$.

Solución: $P'(24/5, -18/5)$

58 Calcula el punto simétrico de $A(0, 4)$ respecto de la recta $3x - y + 1 = 0$.

Solución: $A'(9/5, 17/5)$

59 Calcula el punto simétrico de $A(-2, -1)$ respecto de la recta $r: \begin{cases} x = 3t \\ y = 7 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Solución: $A'(8, 5)$

60 Determina la ecuación de la recta simétrica de $r: x + y - 1 = 0$ respecto de la recta $s: x - 2y + 3 = 0$.

Distancias y áreas

61 Halla el perímetro del cuadrilátero $ABDC$ si $A = (3, 4)$; B es el punto simétrico de A respecto de la bisectriz del primer cuadrante; C, el simétrico de B respecto del eje de ordenadas, y D, el simétrico de C respecto del eje de abscisas.

Solución: $P = 16 + 6\sqrt{2}$ u

62 Halla la distancia del punto $P(2, 2)$ a la recta paralela al eje de abscisas que pasa por el punto $Q(3, 4)$.

Solución: $d = 2$ u

63 Considera el triángulo formado por las rectas de ecuaciones $2x - y - 1 = 0, x + 2y - 8 = 0$ y el eje de ordenadas. Calcula su perímetro y su área.

Solución: $P = 5 + 3\sqrt{5}$ u; $A = 5$ u^2

64 Calcula la distancia entre les rectas $4x - 3y + 7 = 0$ y $8x - 6y = 0$.

Solución: $d = 1{,}4$ u

65 Determina, sin efectuar cálculos, la distancia entre las rectas $3x + 2y - 5 = 0$ y $2x - 5y + 1 = 0$.

Solución: $d = 0$ u

66 Dadas las rectas $ax + (a + 2)y = a + 2$ y $x + ay = 3$, donde a es un parámetro.

a) Calcula un vector director de cada una de estas rectas.

b) Halla los valores de a para los que las rectas son paralelas.

c) Calcula los valores de a para los cuales las rectas son perpendiculares.

d) Calcula la distancia que hay entre las dos rectas cuando $a = 2$.

Solución: *a)* $\vec{v}_r = (-a - 2, a), \vec{v}_s = (-a, 1)$ *b)* $a = 2, a = -1$
c) $a = 0, a = -3$ *d)* $d = 1/\sqrt{5}$ u

67 Considera la recta de ecuación $y = -2x + 2$.

a) Averigua las coordenadas del punto de intersección de esta recta con su recta perpendicular que pasa por $(6, 3)$.

b) Halla la ecuación de la paralela que contiene $(3, 5)$.

c) Calcula la distancia entre las dos rectas paralelas.

Solución: *a)* $P(4/5, 2/5)$ *c)* $d = 9/\sqrt{5}$ u

68 Determina si es equilátero, isósceles o rectángulo el triángulo cuyos vértices son $A(2, 2)$, $B(5, 6)$ y $C(-2, 5)$. Averigua el valor de la altura correspondiente al vértice A y utilízalo para calcular el área del triángulo.

Solución: $h = 5\sqrt{2}/2$; $A = 12{,}5$ u^2

69 Calcula la distancia entre estas rectas.

$$r: 4x - 2y + 10 = 0 \quad s: 4x - 2y - 10 = 0$$

Solución: $h = 2\sqrt{5}$ u

70 Sabiendo que $3x + ay - 5a = 0$ y $-bx + 3y + 3b = 0$ son perpendiculares y sus ordenadas en el origen están a 4 unidades de distancia, calcula a y b.

Solución: si $b = -1, a = -1$; si $b = -9, a = -9$

71 Averigua qué punto, $P(x, y)$, del plano dista $5\sqrt{2}$ u de $Q(4, 1)$ y cumple lo siguiente:

- $x > y$
- $|y| = 2|x|$
- $x > 0$

Solución: $P(3, -6)$

72 Un punto de la recta r: $x + 3y + 7 = 0$ equidista de los puntos $A(-1, 3)$ y $B(3, -5)$. Calcúlalo.

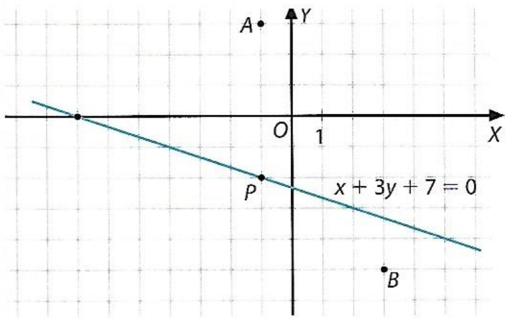

FIGURA 6.37.

Solución: $P(-1, -2)$

El punto $A(4, -3)$ dista 5 unidades de dos puntos de la recta $7x - y - 6 = 0$; halla las coordenadas de los puntos.

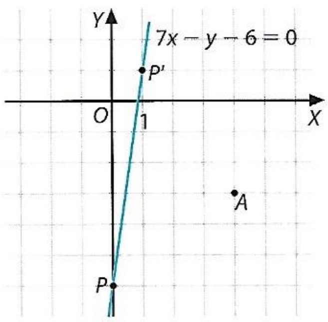

FIGURA 6.38.

Solución: $P(0, -6), P'(1, 1)$

Determina los puntos de la recta $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, que distan $\sqrt{10}$ u de $y = 3x + 1$.

Solución: $P(3, 0), P'(-1, 8)$

Halla el punto de la recta $2x + 3y - 5 = 0$ que equidista de $A(0, 3)$ y $B(-1, 4)$.

Solución: $P(-7/5, 13/5)$

Averigua los puntos de la recta $-8x + y - 1 = 0$ que están a distancia $2\sqrt{2}$ u del punto $A(2, 3)$.

Solución: $P(0, 1), P'(36/65, 353/65)$

77 Encuentra las coordenadas de los puntos situados en la recta $r: x + 2y - 3 = 0$ que distan dos unidades de la recta $s: 4x - 3y + 9 = 0$.

Solución: $P(1, 1), P'(-29/11, 31/11)$

78 De todas las rectas que pasan por el punto $P(2, 1)$, halla las que distan una unidad del origen.

79 Averigua las ecuaciones de las rectas que pasan por $(-2, 4)$ y distan 3 unidades del punto $(-1, 7)$.

80 Determina las ecuaciones de las rectas que distan 7 unidades del punto $P(3, 5)$ y son perpendiculares a la recta cuya ecuación es $3x - 4y + 6 = 0$.

81 En el triángulo de vértices $A(0, 3)$, $B(3, 7)$ y $C(6, 0)$, determina:

a) El perímetro.

b) La ecuación de la recta perpendicular a BC que pasa por A, es decir, la altura del triángulo desde el vértice A.

c) La distancia del punto A a la recta que contiene el segmento BC.

d) El área.

Solución: *a)* $P = 19{,}32$ u *c)* $33/\sqrt{58}$ u *d)* $A = 33/2$ u^2

Ángulos

82 Encuentra las ecuaciones de las rectas que forman con el eje de abscisas un ángulo cuya tangente vale 3.

83 Determina, sin efectuar cálculos, el ángulo existente entre las rectas $3x - 2y - 5 = 0$ y $2x + 3y = 0$.

Solución: $\alpha = 90°$

84 Halla el ángulo que forman estas dos rectas:

$$r: 3x - 5y + 10 = 0, s: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

Solución: $\alpha = 64° 39' 13{,}77''$

85 Averigua la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A(-1/2, 5)$ y $B(7, -2)$ y determina el ángulo que forma con la recta $x = 5$.

Solución: $\alpha = 43° 1' 30{,}24''$

86 Escribe la ecuación de las dos rectas que pasan por el punto $(3, 2)$ y forman un ángulo de 45° con el eje OX:

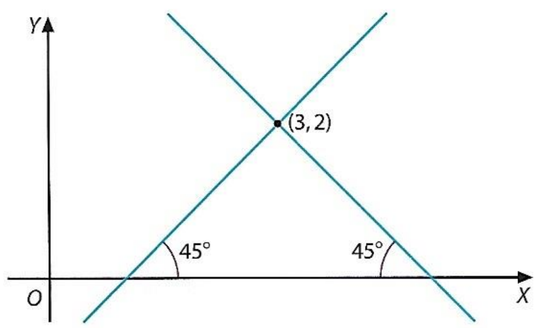

FIGURA 6.39.

87 Determina la pendiente de las rectas que forman un ángulo de 60° con la recta de ecuación $-x + 2y = 4$.

Solución: $m = -0{,}66$ y $m' = 16{,}66$