CONTROL TEMA 3 2º BACHILLERATO A

1. Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y+z=\lambda+1 \\ 3y+2z=2\lambda+3 \\ 3x+(\lambda-1)y+z=\lambda \end{cases}$
   a) Discute el sistema en función del valor de λ.
   b) Resuelve el sistema cuando tiene infinitas soluciones.
   c) ¿Existe algún valor de λ para el que sistema admita la solución $(\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2})$?

2. Sea el sistema siguiente: $\begin{cases} (m-1)x+y-z=0 \\ (m-2)y+z=0 \\ mx+2z=0 \end{cases}$
   c) Discute el sistema en función del valor de m.
   d) Resuelve en todos los casos que sea posible.

3. Dado el sistema siguiente, discutirlo según los valores de a y resolverlo en los casos que sea posible:
$$\begin{cases} x+3y=4 \\ -ax+y=a \\ -x+2y=a+2 \end{cases}$$

4. Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos, sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos, pero que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tengan en ese momento, teniendo en cuenta que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

TEMA 3 : 2º BACH A 2019

① $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 3 & 2 & 2\lambda+3 \\ 3 & \lambda-1 & 1 & \lambda \end{array}\right)$

$|A| = (3+6) - (9+2\lambda-2) = -2\lambda+2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

a) Si $\lambda \neq 1$ rg A = 3 = rg A^* = nº incógnitas $\Rightarrow$ SCD

Si $\lambda = 1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3+15-18 = 0$

rg A = rg A^* = 2 < nº incógnitas $\Rightarrow$ SCI

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 3 & 5-2\lambda \end{array}\right)$ $z = \lambda$ Si $\lambda = 1 \Rightarrow$ SCI tiene infinitas soluciones

$|B| = 3$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 5-2\lambda & 3 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{6-3\lambda-5+2\lambda}{3} = \dfrac{1-\lambda}{3}$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 0 & 5-2\lambda \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{5-2\lambda}{3}$ $\left(\dfrac{1-\lambda}{3}, \dfrac{5-2\lambda}{3}, \lambda\right)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

c) Si tiene solución es porque es SCD

$\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = \lambda+1 \\ 3\cdot(0) + 2\cdot\frac{1}{2} = 2\lambda+3 \\ 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + (\lambda-1)\cdot 0 + \frac{1}{2} = \lambda \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \end{array}$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$

② $\left(\begin{array}{ccc|c} m-1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & m-2 & 1 & 0 \\ m & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$|A| = 2(m-1)(m-2) + m + m(m-2) = 3m^2 - 7m + 4 = 0$ $\begin{array}{l} \nearrow m_1 = 4/3 \\ \searrow m_2 = 1 \end{array}$

Si $m \neq \frac{4}{3}, 1$ rg A = rg A^* = 3 = nº incógnitas $\Rightarrow$ SCD

Por ser homogéneo la solución es (0, 0, 0)

Por ser homogéneo si $m = \frac{4}{3}, 1$ $\Rightarrow$ rg A = rg A^* = 2 < nº incógnitas

$\Rightarrow$ SCI

Si $m = 4/3$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$ SCI $z=\lambda$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1/3 & 1 & \lambda \\ 0 & -2/3 & -\lambda \end{array}\right)$

$|B| = -\frac{2}{9}$ $x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -\lambda & -2/3 \end{vmatrix}}{-2/9} = \frac{9\lambda}{-6}$ $y = \frac{\begin{vmatrix} 1/3 & \lambda \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}}{-2/9} = \frac{3\lambda}{2}$

$\left(-\frac{3\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \lambda\right) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Si $m=1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $x=\lambda$ $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{array}\right)$

$|B| = -2$ $y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 2 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{\lambda}{2}$ $z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}}{-2} = \frac{\lambda}{-2}$

$\left(\lambda, -\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(3) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ -a & 1 & a \\ -1 & 2 & a+2 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \rightarrow rg\ A = 2$

$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -a & 1 & a \\ -1 & 2 & a+2 \end{vmatrix} = a+2-8a-3a+4-2a+3a^2+6a \Rightarrow 3a^2-6x+4=0$

$\nexists$ solución

$rg\ A = 2 \neq rg\ A^* = 3$ No tiene solución

(4) Madre $= x$
H. Mayor $= y$
H. Menor $= z$

$$\left.\begin{array}{l} x-14 = 5(y-14+z-14) \\ x+10 = y+10+z+10 \\ z+x-y = 42 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x-5y-5z = -126 \\ x-y-z = 10 \\ x-y+z = 42 \end{array}\right\}$$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & -126 \\ 1 & -1 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 42 \end{array}\right)$

$|A| = 8$

$rg\ A = rg\ A^* =$ nº incógnitas $\Longrightarrow$ SCD

$x = \frac{\begin{vmatrix} -126 & -5 & -5 \\ 10 & -1 & -1 \\ 42 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{352}{8} = 44$ $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -126 & -5 \\ 1 & 10 & -1 \\ 1 & 42 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{144}{8} = 18$

$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 & -126 \\ 1 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 42 \end{vmatrix}}{8} = \frac{128}{8} = 16$ $(44, 18, 16)$