TEMA 7

① $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}\right)^{\frac{ax^3+1}{x^2-1}}=1$ (1 punto)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}\right)^{\frac{ax^3+1}{x^2-1}}=[1^\infty]=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}-1\right)\cdot\frac{ax^3+1}{x^2-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}-2x+1-\cancel{x^2}-x+2}{x^2+x-2}\right)\left(\frac{ax^3+1}{x^2-1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-3x+3}{x^2+x-2}\right)\left(\frac{ax^3+1}{x^2-1}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3ax^4-3x+3ax^3+3}{x^4-x^2+x^3-x-2x^2+2}}=e^{-3a}=1$$

Para que valga 1, el exponente debe ser $0 \to -3a=0 \to \boxed{a=0}$

② $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & \text{si } 0\leq x\leq 2\\ x-1 & \text{si } 2<x\leq 3\end{cases}$ (1,5 puntos)

- Los dos trozos son continuos por ser polinómicas. Falta saber en $x=2$

$f(2)=-2^2+1=-3$

$\lim\limits_{x\to 2^-} -x^2+1=-3$
$\neq$ Discontinua inevitable de salto finito en $x=2$
$\lim\limits_{x\to 2^+} x-1=1$

- Probar que existe $c\in(0,3) \,/\, f(c)=0$

$-x^2+1=0 \to x=\pm 1$ Si $x=1\in(0,3) \,/\, f(1)=0$

$x-1=1 \to x=1$

Luego existe un punto $c=1\in(0,3)\,/\,f(c)=0$

- No contradice el teorema de Bolzano, porque no se puede aplicar, ya que la función no es continua en $[0,3]$

③ $f(x)=x^3-x^2+x$ (1,5 puntos)

$f(x)$ cont en $[1,2]$ por ser polinómica

Si $a\in(1,2)$ tal que

$f(1) < a < f(2)$

$1 < \sqrt{5} < 6$

$\xrightarrow{TVI}$ $\exists$ al menos $c\in(1,2)\,/$

$f(a)=\sqrt{5}$

④

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{x+4} & si\ x<-2\\ x^2+2x+4 & si\ -2\leq x<1\\ |x-5| & si\ x\geq 1\end{cases}$$

(2 puntos)

$$|x-5|=\begin{cases}-x+5 & si\ x<5\\ x-5 & si\ x\geq 5\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{x+4} & si\ x<-2\\ x^2+2x+4 & si\ -2\leq x<1\\ -x+5 & si\ 1\leq x<5\\ x-5 & si\ x\geq 5\end{cases}$$

① El primer trozo es discontinua en $x=-4$, porque su dominio es $(-\infty,-2)\setminus\{-4\}$. Es discontinuidad evitable porque $\nexists f(-4)$

② Las otras 3 funciones son continuas en su intervalo de definición por ser polinómicas

③ En los puntos en los que cambia la función

En $x=-2$ $f(-2)=4$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{3}{x+4}=\frac{3}{2}$$ $\neq$ Disc. inevitable de salto finito

$$\lim_{x\to -2^+}x^2+2x+4=4$$

En $x=1$ $f(1)=4$

$$\lim_{x\to 1^-}x^2+2x+4=7$$ $\neq$ Disc. inevitable de salto finito

$$\lim_{x\to 1^+}-x+5=4$$

En $x=5$ Continua por ser una función de valor absoluto.

⑤ a)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{9x^2-5x}{4x+9x^2-2}\right)^{\frac{2x^2+\sqrt{x^2-4}}{x-2}}=[1^\infty]=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{9x^2-5x}{4x+9x^2-2}-1\right)\cdot\frac{2x^2+\sqrt{x^2-4}}{x-2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-9x+2}{9x^2+4x-2}\right)\left(\frac{2x^2+\sqrt{x^2-4}}{x-2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-18x^3-9x\sqrt{x^2-4}+4x^2+2\sqrt{x^2-4}}{9x^3-18x^2+4x^2-8x-2x+4}}$$

$$=e^{-18/9}=e^{-2}$$

b)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-(x+1)}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+5)-(x+1)^2}{(x^2-4)(\sqrt{x^2+5}+(x+1))}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x^2}+5-\cancel{x^2}-2x-1}{(x^2-4)(\sqrt{x^2+5}+x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{-2x+4}{(x^2-4)(\sqrt{x^2+5}+x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2+5}+x+1)}=\frac{-2}{4(3+2+1)}=-\frac{1}{12}$$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\ln \frac{1+x^2}{1+x^3}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{1+x^3}\right) = \ln 0 = -\infty$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{5^x+4^x}{3^x+6^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5^x}{6^x}+\frac{4^x}{6^x}}{\frac{3^x}{6^x}+\frac{6^x}{6^x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^x+\left(\frac{4}{6}\right)^x}{\left(\frac{3}{6}\right)^x+1} =$

$= \frac{0+0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$

(6) Asíntotas $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-1}{x+4} & \text{si } x \le 0 \\ \frac{x^2+5}{x+3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ (2 puntos)

(A) Dom $(-\infty, 0] - \{-4\}$

AV $\lim_{x\to -4} \frac{3x-1}{x+4} = \frac{-13}{0} = \pm\infty \rightarrow \boxed{x=-4}$

AH $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x-1}{x+4} = 3 \rightarrow \boxed{y=3}$

AO No tiene, porque hay AH

(B) Dom $(0, +\infty)$ es continua en su intervalo

AV No tiene por ser continua

AH $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5}{x+3} = \infty$ No tiene

AO $m = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5}{x^2+3x} = 1 \rightarrow \boxed{y = x-3}$

$n = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+5}{x+3} - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5-x^2-3x}{x+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+5}{x+3} = -3$

Escaneado con CamSca