ACTIVIDADES FINALES

5.1. Se consideran los vectores: $\vec{u}=(3,2,1)$, $\vec{v}=(-1,2,1)$, $\vec{w}=(7,-2,0)$.

a) ¿Son una base de $\mathbb{R}^3$?

b) ¿Son base los vectores $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{w}$, $\vec{v}+\vec{w}$?

c) ¿Son base los vectores $\alpha\vec{u}$, $\beta\vec{v}$, $\gamma\vec{w}$ para todos los valores α, β, γ, pertenecientes a los reales?

5.2. Encuentra una base ortonormal que tenga un vector proporcional a $(-2,1,1)$.

5.3. Determina el valor de x para que el vector $(1,x,5)$ junto con los vectores $(1,1,1)$ y $(1,2,3)$ formen un conjunto linealmente dependiente.

5.4. Demuestra que los vectores $\vec{u}=(1,1,0)$, $\vec{v}=(1,0,1)$, $\vec{w}=(0,1,1)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ y determina las coordenadas de los vectores de la base canónica con respecto a esa base.

5.5. ¿Para qué valores de λ los vectores $\left(\lambda,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3},\lambda,\frac{1}{3}\right)$ y $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\lambda\right)$ son linealmente independientes?

5.6. Demuestra que si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ son linealmente independientes, entonces $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{w}$, $\vec{v}+\vec{w}$ son también linealmente independientes.

5.7. Demuestra que si los vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ son linealmente independientes, entonces $\vec{u}+\vec{v}-2\vec{w}$, $\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w}$, $\vec{u}+3\vec{v}$ son linealmente independientes.

5.8. Se consideran los vectores: $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(1,1,2)$, $\vec{w}=(1,2,3)$, $\vec{t}=(6,9,14)$.
¿Son los vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ linealmente independientes? En caso afirmativo, halla las coordenadas de $\vec{t}$ con respecto a la base, en caso negativo establece la relación entre los vectores.

5.9. Dados los vectores: $\vec{u}=(1,1,0)$, $\vec{v}=(0,k,1)$, $\vec{w}=(1,k+1,k)$, se pide:

a) Halla el valor de k para que los vectores formen una base.

b) Para $k=2$, halla las coordenadas de $(1,0,0)$ con respecto a esa base.

5.10. Dados los vectores: $\vec{u}=(1,m,-1)$, $\vec{v}=(2,1,-m)$, $\vec{w}=(1,-1,-1)$, se pide:

a) Halla el valor de m para que los vectores sean linealmente independientes.

b) En el caso en el que sean linealmente independientes, escribe $(1,2,m-1)$ como combinación lineal de los otros dos.

c) En el caso en el que sean linealmente dependientes, expresa uno de ellos en función de los otros dos.

d) Para $m=1$, halla las coordenadas del vector $(1,1,1)$ con respecto a la base.

5.11. Halla un vector $\vec{v}$ de módulo 5 y de tal modo que cumpla que sus vectores directores sean $\alpha=30°$, $\beta<90°$ y $\gamma=150°$.

5.12. Dados los puntos: $A=(1,1,1)$, $B=(2,t,1)$, $C=(1,1,t)$.

a) ¿Existe algún valor de t para que estén alineados?

b) ¿Existe algún valor de t para que sean coplanarios?

c) Suponiendo que para $t=1$ los puntos A, B, D, E forman un paralelogramo y que su punto medio es $F=(-2,-4,5)$, determina las coordenadas de D y E.

d) Para $t=1$, halla los cosenos directores del vector $\overrightarrow{BC}$.

5.13. Dados los puntos: $A=(2,-1,1)$, $B=(0,4,-1)$, $B=(0,4,-1)$, $C=(a,b,1)$, halla:

a) a, b para que estén alineados.

b) La condición que hay entre a, b para que los tres puntos estén en el mismo plano.

5.14. a) Halla un vector unitario que sea perpendicular a $(-1,-1,0)$ y que forme un ángulo de $60°$ con el vector $(1,1,1)$.

b) Halla un vector unitario perpendicular a los vectores $(-1,-1,0)$ y $(1,1,1)$.

5.15. Halla el valor de b para que los vectores $(1,b,2)$ y $(-1,1,2)$ formen un ángulo de $120°$.

5.16. Se consideran los puntos: $A=(2,3,-1)$, $B=(0,-3,5)$, $C=(-1,2,-1)$.
a) Halla el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$.
b) ¿Son coplanarios los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$?
c) Normaliza los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ y halla sus cosenos directores.

5.17. Demuestra que si $\vec{u}$, $\vec{v}$ son dos vectores del mismo módulo, los vectores $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$ son ortogonales.

5.18. Sea $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ una base tal que $|\vec{u}|=|\vec{v}|=|\vec{w}|=3$ y que los ángulos que forman, dos a dos, los vectores de la base son 120°. Halla el módulo del vector $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.

5.19. Dado el triángulo de vértices: $A=(1,2,5)$, $B=(-3,2,-5)$, $C=(-1,-1,-1)$, determina la clase de triángulo que es, según sus lados y sus ángulos.

5.20. a) Si $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=-1$, ¿qué valores puede tomar el producto $\vec{u}\cdot\vec{v}$?
b) Halla los valores de los productos escalares de los vectores de una base ortogonal.
c) ¿Qué valores pueden tomar los productos escalares de los vectores de una base ortonormal?

5.21. Dados los vectores: $\vec{u}=(1,2,-3)$, $\vec{v}=(4,1,-2)$, $\vec{w}=(5,3,-1)$, se pide:
a) Halla el producto vectorial de $\vec{u},\vec{v}$.
b) Halla el producto mixto de los vectores.
c) Halla el área del triángulo cuyos lados son $\vec{u},\vec{w}$.

5.22. Dados los vectores $(1,-1,-1)$, $(3,2,-5)$, halla:
a) Un vector perpendicular a ambos de módulo 10.
b) El ángulo formado por los vectores.
c) Normaliza los vectores y halla sus cosenos directores.

5.23. Dados los vectores $\vec{u},\vec{v}$, calcula:
a) $\vec{u}\times(\vec{u}+\vec{v})+\vec{v}\times(\vec{v}+\vec{u})$.
b) $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})$.

5.24. Dados los vectores $(1,1,1)$, $(k,0,2)$, $(2,-1,k)$:
a) Halla k para que el tetraedro cuyas aristas son los vectores tenga un volumen de $6u^3$.
b) Halla k para que los tres vectores sean coplanarios.

5.25. Se consideran los puntos: $A=(1,0,3)$, $B=(3,-1,0)$, $C=(0,-1,2)$, $D=(a,b,-1)$.
Halla a y b sabiendo que la recta AB corta perpendicularmente a la recta que pasa por C y D.

5.26. Dados los puntos: $A=(2,0,-2)$, $B=(3,-4,-1)$, $C=(5,4,-3)$, $D=(0,1,4)$.
a) Calcula el área del triángulo de vértices A, B, C.
b) Calcula el volumen del tetraedro $ABCD$.

5.27. Dados los vectores: $\vec{u}=(2,3,4)$, $\vec{v}=(-1,-1,-1)$, $\vec{w}=(-1,\lambda,-5)$, encuentra los valores de λ que hacen que el paralelepípedo generado por esos vectores tenga un volumen igual a 6.

5.28. Dados los vectores: $\vec{u}=(a,1+a,2a)$, $\vec{v}=(a,1,a)$, $\vec{w}=(1,a,1)$, se pide:
a) Determina los valores de a para que los vectores sean linealmente independientes.
b) Estudia si el vector $\vec{c}=(3,3,0)$ depende linealmente de los vectores para el caso $a=2$. Justifica la respuesta.
c) Justifica si para $a=0$ se cumple la igualdad $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$.

5.29. Sean A, B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación: $\overrightarrow{CB}=-3\overrightarrow{CA}$.
a) Calcula el valor que toma k en la expresión $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$.
b) Si $A=(1,2,-1)$, $B=(6,3,9)$, halla las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.

5.30. Los puntos $A=(1,1,1)$, $B=(2,2,2)$, $C=(1,3,3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:
a) Halla las coordenadas del cuarto vértice y el área del paralelogramo.
b) Clasifica el paralelogramo por sus lados y sus ángulos.

Problemas

69 Determina un vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ sabiendo que cumple las tres condiciones siguientes:

a) La suma de sus coordenadas es 3

b) El vector $\vec{v}$ es combinación lineal de los vectores $(2, 2, 2)$ y $(-1, 1, 0)$

c) Los vectores $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes.

70 Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1, 1, 1)$ y $B(0, 2, 0)$. Si el centro del paralelogramo es $E(0, 0, 1)$, se pide:

a) Las coordenadas de los otros vértices.

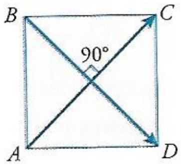
b) El área del paralelogramo.

71 Sabiendo que $|\vec{u}| = 3$ y $|\vec{v}| = 5$, halla los posibles valores del parámetro real a para que los vectores $\vec{u} + a\vec{v}$ y $\vec{u} - a\vec{v}$ sean ortogonales.

72 ¿Qué ángulo deben formar dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que ambos tengan el mismo módulo que su diferencia $\vec{u} - \vec{v}$?

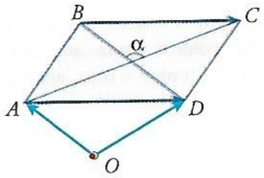
73 Calcula los valores de x e y para que el vector $(x, y, 1)$ sea ortogonal a los vectores $(3, 2, 0)$ y $(2, 0, -1)$

74 Demuestra que el cuadrilátero con los vértices en los puntos $A(-3, 5, 6)$, $B(1, -5, 7)$, $C(8, -3, -1)$ y $D(4, 7, -2)$ es un cuadrado.



75 Halla las coordenadas del vector $\vec{a}(x, y, z)$, que es perpendicular a los vectores $\vec{u}(2, 3, -1)$ y $\vec{v}(1, -2, 3)$ y que $\vec{a} \cdot \vec{w} = -6$, siendo $\vec{w}(2, -1, 1)$

76 Halla el ángulo α que forman las diagonales AC y BD de un paralelogramo si tres vértices están en los puntos $A(2, 1, 3)$, $B(5, 2, -1)$ y $C(-3, 3, -3)$



77 Un cuadrilátero tiene los vértices en los puntos $A(1, -2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-4, 1, 1)$ y $D(-5, -5, 3)$. Demuestra que sus diagonales AC y BD son perpendiculares entre sí.

78 Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$ y $C(1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla las coordenadas del cuarto vértice y calcula el área del paralelogramo.

Para profundizar

79 Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tales que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$ y $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, calcula la siguiente suma de productos escalares: $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

80 Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores ortogonales y de módulo 1. Halla los posibles valores del parámetro real a para que los vectores $\vec{u} + a\vec{v}$ y $\vec{u} - a\vec{v}$ formen un ángulo de 60°

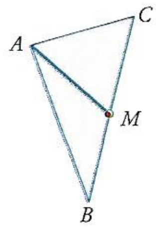
81 Sean los puntos:

$$A(1, k, 0);\ B(1, 1, k-2) \text{ y } C(1, -1, k)$$

a) Comprueba que los tres puntos no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome k

b) Halla el área del triángulo determinada por los tres puntos.

82 En el triángulo formado por los vértices $A(3, -1, 5)$, $B(4, 2, -5)$ y $C(-4, 0, 3)$, calcula la longitud de la mediana trazada desde el vértice A



83 Dados los puntos $A(1, -1, 3)$, $B(1, 2, 1)$ y $C(1, 0, -1)$, halla las coordenadas de todos los puntos posibles D para que $ABCD$ formen un paralelogramo.

84 Se considera el tetraedro cuyos vértices son los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(-2, 1, 0)$ y $D(0, 1, 3)$

a) Calcula el área del triángulo ABC

b) Calcula el volumen del tetraedro $ABCD$

85 Calcula el volumen de una pirámide que tiene por base el triángulo ABC y por vértice el punto $D(3, -1, 1)$, siendo $A(5, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, -5)$

86 Los puntos $A(1, 0, -1)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(-7, 1, 5)$ son los vértices consecutivos de un paralelogramo $ABCD$

a) Halla las coordenadas del vértice D

b) Halla el área del paralelogramo.

87 Se consideran los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 3, 1)$ y $D(5, 8, 3)$. Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos $ABCD$. Interpreta el resultado. (No hay errores en los datos).

88 Se consideran los puntos $A(1, -3, 1)$, $B(2, 3, 1)$, $C(1, 3, -1)$ y $D(0, 0, 0)$. Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos $ABCD$