CONTROL TEMA 3

1. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + az = -1 \\ -x + ay - z = 2 \\ 2ax - 2y + a^2z = 2 \end{array}\right\}$$

   a) Discute el sistema en función de los valores del parámetro a.
   b) Resuelve cuando sea compatible determinado.
   c) Resuelve cuando tiene infinitas soluciones. (3 puntos)

2. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{c} mx + (2m+1)y + (1-m)z = 0 \\ 3mx + mz = 0 \\ mx + my + (1-m)z = 0 \end{array}\right\}$$

   a) Discute el sistema en función de los valores del parámetro m.
   b) Resuelve cuando sea compatible (3 puntos)

3. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2k \\ 3x - 5y = k \end{array}\right\}$$

   a) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.
   b) Resolverlo en los casos que sea posible.(2 puntos)

4. Con las 12 monedas que tengo en el bolsillo (de 50 céntimos, de 20 céntimos y de 10 céntimos de euro) puedo comprar un pastel cuyo precio es 2, 80 euros. Si una moneda de 50 céntimos lo fuera de 20, entonces el número de monedas de 20 céntimos y el número de las de 10 céntimos coincidiría. ¿Cuántas monedas tengo de cada clase? (2 puntos)

TEMA 3

① $\left.\begin{array}{l} 2x+y+az=-1 \\ -x+ay-z=2 \\ 2ax-2y+a^2z=2 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & -1 \\ -1 & a & -1 & 2 \\ 2a & -2 & a^2 & 2 \end{array}\right)$

$$|A| = 2a^3+2a-2a-2a^3-4+a^2 = a^2-4=0 \Rightarrow a=\pm 2$$

a) Si $a \neq 2,-2 \rightarrow rg\, A = rg\, A^* = 3 = n^o$ incógnitas $\Rightarrow$ SCD

Si $a=2$ $\left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right)$ $|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8-2+8+8+8+2=32\neq 0$

$$2 = rg\, A \neq rg\, A^* = 3 \Rightarrow SI$$

Si $a=-2$

$\left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right)$ $|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -8-2-8+8+8+2=0$

$$2 = rg\, A = rg\, A^* < n^o inc \Rightarrow SCI$$

b)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & a \\ 2 & a & -1 \\ 2 & -2 & a^2 \end{vmatrix}}{a^2-4} = \frac{-a^3-4a-2-2a^2+2-2a^2}{(a+2)(a-2)} = \frac{-a^3-4a^2-4a-2}{a^2-4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & -1 \\ 2a & 2 & a^2 \end{vmatrix}}{a^2-4} = \frac{4a^2-2a+2a-4a^2+4-a^2}{a^2-4} = \frac{-a^2+4}{a^2-4} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & a & 2 \\ 2a & -2 & 2 \end{vmatrix}}{a^2-4} = \frac{4a-2+4a+2a^2+8+2}{a^2-4} = \frac{2a^2+8a+8}{a^2-4}$$

$$\left(\frac{-a^3-4a^2-4a-2}{a^2-4}, -1, \frac{2a^2+8a+8}{a^2-4}\right) \quad \forall a \in \mathbb{R}\setminus\{2,-2\}$$

c) Si $a=-2$ SCI

$\left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ \cancel{-4} & \cancel{-2} & \cancel{4} & \cancel{2} \end{array}\right)$ $z=\lambda \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1+2\lambda \\ -1 & -2 & 2+\lambda \end{array}\right)$

$$|B| = -4+1 = -3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1+2\lambda & 1 \\ 2+\lambda & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2-4\lambda-2-\lambda}{-3} = \frac{-5\lambda}{-3} = \frac{5\lambda}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1+2\lambda \\ -1 & 2+\lambda \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4+2\lambda-1+2\lambda}{-3} = \frac{3+4\lambda}{-3}$$

$$\left(\frac{5\lambda}{3}, \frac{3+4\lambda}{-3}, \lambda\right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(2) $\left.\begin{array}{l} mx + (2m+1)y + (1-m)z = 0 \\ 3mx + mz = 0 \\ mx + my + (1-m)z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2m+1 & 1-m & 0 \\ 3m & 0 & m & 0 \\ m & m & 1-m & 0 \end{array}\right)$

$$|A| = 3m^2 - 3m^3 + 2m^3 + m^2 - m^3 - 6m^2 - 3m + 6m^3 + 3m^2 =$$

$$= 4m^3 + m^2 - 3m = m(4m^2 + m - 3) = 0 \rightarrow m_1 = 0, \quad m_2 = -1, \quad m_3 = \frac{3}{4}$$

a) Por ser homogéneo $rg\, A = rg\, A^*$

Si $m \neq 0, -1, \frac{3}{4} \Rightarrow rg\, A = rg\, A^* = n^o\, Inc \Rightarrow SCD$

Si $m = 0, -1, \frac{3}{4} \Rightarrow rg\, A = rg\, A^* < n^o\, Inc \Rightarrow SCI$

b) Si $m \neq 0, -1, \frac{3}{4} \Rightarrow SCD$. Por ser homogéneo, la solución es $(0,0,0)$

Si $m=0$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{x=\lambda} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$|B| = 1$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 0 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0 \qquad (\lambda, 0, 0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $m=-1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z=\lambda} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2\lambda \\ -3 & 0 & \lambda \end{array}\right)$

$|B| = -3$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2\lambda & -1 \\ \lambda & 0 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{\lambda}{-3} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2\lambda \\ -3 & \lambda \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-\lambda - 6\lambda}{-3} = \frac{7\lambda}{3}$$

$\left(-\frac{\lambda}{3}, \frac{7\lambda}{3}, \lambda\right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Si $m = \frac{3}{4}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3/4 & 10/4 & 1/4 & 0 \\ 9/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 3/4 & 3/4 & 1/4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z=\lambda} \left(\begin{array}{cc|c} 3/4 & 10/4 & -1/4\lambda \\ 9/4 & 0 & -3/4\lambda \end{array}\right)$

$|B| = -\frac{90}{16}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1/4\lambda & 10/4 \\ -3/4\lambda & 0 \end{vmatrix}}{-90/16} = \frac{30/16\,\lambda}{-90/16} = \frac{\lambda}{-3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3/4 & -1/4\lambda \\ 9/4 & -3/4\lambda \end{vmatrix}}{-90/16} = \frac{-\frac{9}{16}\lambda + \frac{9}{16}\lambda}{-\frac{90}{16}} = 0$$

$\left(\frac{\lambda}{-3}, 0, \lambda\right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

③ $\left.\begin{array}{l} x-y=3 \\ 2x-3y=2k \\ 3x-5y=k \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2k \\ 3 & -5 & k \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\text{rg } A = 2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2k \\ 3 & -5 & k \end{vmatrix} = -3k - 30 - 6k + 27 + 10k + 2k = 3k - 3 = 0 \rightarrow k = 1$$

Si $k \neq 1$ $\quad \text{rg } A = 2 \neq \text{rg } A^* = 3 \Rightarrow$ SI

Si $k = 1$ $\quad \text{rg } A = 2 = \text{rg } A^* = \text{nº inc} \Rightarrow$ SCD

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{array}\right)$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-9+2}{-1} = 7$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{2-6}{-1} = 4$$

$(7, 4)$

④ x = nº monedas 0,50
y = nº monedas 0,20
z = nº monedas 0,10

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 0{,}50x + 0{,}20y + 0{,}10z = 2{,}80 \\ y+1 = z \end{array}\right\}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0{,}50 & 0{,}20 & 0{,}10 & 2{,}80 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

$|A| = -0{,}20 + 0{,}50 - 0{,}10 + 0{,}50 = 0{,}70$

$\text{rg } A = \text{rg } A^* = \text{nº inc} \Rightarrow$ SCD

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 2{,}80 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{0{,}70} = \frac{2{,}1}{0{,}70} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 0{,}50 & 2{,}80 & 0{,}10 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{0{,}70} = \frac{2{,}8}{0{,}70} = 4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 0{,}50 & 0{,}20 & 2{,}80 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{0{,}70} = \frac{3{,}5}{0{,}7} = 5$$

Tengo 3 monedas de 0,50 céntimos, 4 monedas de 0,20 céntimos y 5 monedas de 0,10 céntimos.