TEMAS 8 Y 9. 2º BACHILLERATO A

1. Calcula el valor de la derivada en el punto (1,-1) de la siguiente función:
   $2y^4 + 8x^3y - 4y^2x^2 + 4 = 0$ (1 punto)

2. Calcula los siguientes límites:

   $a)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x\cos x - 1}{\operatorname{sen} x - x + 1 - \cos x}$ $\quad b.)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2-1}\right)$ $\quad c)\ \lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)^{3x^2}$

   d. Calcula los valores de a para que el $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{\cos^2 ax - 1} = -1$ (3 puntos)

3. Calcula las siguientes derivadas:

   $a)\ y = \left(\frac{\cos x}{x^2 - 5x + 2}\right)^{3x+5}$

   $b)\ y = \sqrt[x]{\frac{\operatorname{sen} x}{e^{tg 3x}}}$ (2 puntos)

4. Calcula los valores a , b y c, para que la función sea continua y derivable , y además tenga segunda derivada. (2 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} (ax^2 + bx + c)\cdot e^{-x+1} & si\ \ x > 1 \\ \operatorname{sen}(x-1) & si\ x \le 1 \end{cases}$$

5. Sea la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$, calcula la monotonía, la curvatura, los máximos y mínimos, y los puntos de inflexión. Y la recta tangente y la recta normal a la curva en el punto x=0 (2 puntos)

TEMAS 8, 9   2º Bach A

(1) $2y^4+8x^3y-4y^2x^2+4=0$

$8y^3y'+24x^2y+8x^3y'-8yy'x^2-8y^2x=0$

$$y'=\frac{-24x^2y+8y^2x}{8y^3+8x^3-8yx^2} \Rightarrow y'(1,-1)=\frac{-24\cdot1^2(-1)+8(-1)^2\cdot1}{8(-1)^3+8\cdot1^3-8(-1)\cdot1^2}=\frac{24+8}{-8+8+8}=\frac{32}{8}=4$$

(2) a) $$\lim_{x\to0}\frac{e^x-x\cos x-1}{\text{sen}\,x-x+1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{L'H}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x+x\,\text{sen}\,x}{\cos x-1+\text{sen}\,x}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{L'H}{=}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x+\text{sen}\,x+\text{sen}\,x+x\cos x}{-\text{sen}\,x+\cos x}=\frac{1}{1}=1$$

b) $$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1-2\ln x}{\ln x(x^2-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{L'H}{=}\lim_{x\to1}\frac{2x-\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}(x^2-1)+\ln x\cdot2x}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{L'H}{=}\lim_{x\to1}\frac{2+\frac{2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}(x^2-1)+\frac{1}{x}\cdot2x+\frac{1}{x}\cdot2x+\ln x\cdot2}=\frac{4}{2+2}=1$$

c) $$\lim_{x\to0}(\text{sen}\,x)^{3x^2}=[0^0]$$

$$\ln\lim_{x\to0}(\text{sen}\,x)^{3x^2}=\lim_{x\to0}\ln(\text{sen}\,x)^{3x^2}=\lim_{x\to0}3x^2\cdot\ln(\text{sen}\,x)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\text{sen}\,x)}{\frac{1}{3x^2}}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{L'H}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\text{sen}\,x}}{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{3x^3\cos x}{-2\,\text{sen}\,x}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{L'H}{=}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{9x^2\cos x-3x^3\,\text{sen}\,x}{-2\cos x}=\frac{0}{-2}=0$$

$$\lim_{x\to0}(\text{sen}\,x)^{3x^2}=e^0=1$$

d) $$\lim_{x\to0}\frac{\text{sen}\,x^2}{\cos^2ax-1}=-1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\text{sen}\,x^2}{\cos^2ax-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{L'H}{=}\lim_{x\to0}\frac{2x\cos x^2}{2\cos ax\,(-\text{sen}\,ax)\cdot a}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{L'H}{=}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x^2+x(-\text{sen}\,x^2)\cdot2x}{-a^2\,\text{sen}\,ax\,(-\text{sen}\,ax)-a^2\cos ax\cos ax}=\frac{1}{-a^2}=-1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{-a^2}=-1\Rightarrow1=a^2\Rightarrow\boxed{a=\pm1}$$

Escaneado con CamScanner

③ a) $f(x) = \left(\frac{\cos x}{x^2-5x+2}\right)^{3x+5}$

$$\ln y = (3x+5)\ \ln\left(\frac{\cos x}{x^2-5x+2}\right)$$

$$\frac{y'}{y} = 3\ln\left(\frac{\cos x}{x^2-5x+2}\right) + (3x+5)\cdot\frac{1}{\frac{\cos x}{x^2-5x+2}}\cdot\frac{(-\operatorname{sen} x)(x^2-5x+2)-\cos x\,(2x-5)}{(x^2-5x+2)^2}$$

$$y' = \left[3\ln\left(\frac{\cos x}{x^2-5x+2}\right) + \frac{(3x+5)\,(x^2-5x+2)\left[(-\operatorname{sen} x)(x^2-5x+2)-\cos x\,(2x-5)\right]}{\cos x\cdot(x^2-5x+2)^2}\right]\left(\frac{\cos x}{x^2-5x+2}\right)^{3x+5}$$

b) $f(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{e^{\operatorname{tg} 3x}}\right)^{1/x}$

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{e^{\operatorname{tg} 3x}}\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \left[\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{e^{\operatorname{tg} 3x}}\right)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{e^{\operatorname{tg} 3x}}}\left[\frac{\cos x\cdot e^{\operatorname{tg} 3x}-\operatorname{sen} x\cdot e^{\operatorname{tg} 3x}\cdot 3(1+\operatorname{tg}^2 3x)}{(e^{\operatorname{tg} 3x})^2}\right]\right]\left(\frac{\operatorname{sen} x}{e^{\operatorname{tg} 3x}}\right)^{1/x}$$

④ $f(x) = \begin{cases}(ax^2+bx+c)\,e^{-x+1} & \text{si } x>1 \\ \operatorname{sen}(x-1) & \text{si } x\le 1\end{cases}$ cont por ser combinación de polinómica y exp. / " " " función seno

$$f'(x) = \begin{cases}(2ax+b)\,e^{-x+1} - (ax^2+bx+c)\,e^{-x+1} & \text{si } x>1 \\ \cos(x-1) & \text{si } x\le 1\end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases}2a\,e^{-x+1} - (2ax+b)e^{-x+1} - (2ax+b)\,e^{-x+1} + (ax^2+bx+c)\,e^{-x+1} & \text{si } x>1 \\ -\operatorname{sen}(x-1) & \text{si } x\le 1\end{cases}$$

Si es continua $f(1) = \operatorname{sen} 0 = 0$

$\lim_{x\to 1^+} (ax^2+bx+c)\,e^{-x+1} = a+b+c$ $\Rightarrow \boxed{a+b+c=0}$

$\lim_{x\to 1^-} \operatorname{sen}(x-1) = 0$

Si es derivable $f'(1^+) = (2a+b) - (a+b+c)$ $\Rightarrow 2a+b-a-b-c=0 \Rightarrow \boxed{a-c=1}$

$f'(1^-) = \cos 0 = 1$

si tiene segunda derivada $f''(1^+) = 2a-(2a+b)-(2a+b)+(a+b+c)$ $\Rightarrow \cancel{2a}-\cancel{2a}-\cancel{b}-2a-b+a+\cancel{b}+c=0$

$f''(1^-) = -\operatorname{sen} 0 = 0$ $\qquad \boxed{-a-b+c=0}$

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a-c=1 \\ -a-b+c=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \end{array}$$

⑤ $f(x) = x^3-2x^2-4x+1$

- $f'(x) = 3x^2-4x-4 = 0$ ⟶ $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{2}{3}$

  $(-\infty, -2/3)$ $f'>0$ crec
  $(-2/3, 2)$ $f'<0$ decr
  $(2, +\infty)$ $f'>0$ crec

  Máx $\left(-\frac{2}{3}, \frac{67}{27}\right)$
  Mín $(2, -7)$

- $f''(x) = 6x-4 = 0 \to x = \frac{2}{3}$

  $(-\infty, 2/3)$ $f''<0$ ∩ convexa
  $(2/3, +\infty)$ $f''>0$ ∪ cóncava

  PI $\left(\frac{2}{3}, -\frac{61}{27}\right)$

- $x_0 = 0$ ⟶ $y_0 = 1$; $m = f'(0) = -4$

  RT $y-1 = -4(x-0) \longrightarrow y = -4x+1$

  RN $y-1 = \frac{1}{4}(x-0) \longrightarrow y = \frac{1}{4}x+1$