TEMA 3. 2º BACH B

1. Se considera el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + ay - 7z = 4a - 1 \\ x + (1 + a)y - (a + 6)z = 3a + 1 \\ ay - 6z = 3a - 2 \end{cases}$$

   a) Discutir el sistema en función de los distintos valores de a
   b) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.
   c) Resolver el sistema para el caso a=-3 (3 puntos)

2. Dado el sistema homogéneo

$$\begin{cases} \alpha x + 2y + z = 0 \\ \alpha x - y + 2z = 0 \\ x - \alpha y + 2z = 0 \end{cases}$$

   Resolverlo en todos los casos. (2 puntos)

3. El cajero automático de una determinada entidad bancarias sólo admite billetes de 50, 20 y 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averigua el número de cada tipo de billetes, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble del de los de 20. (2 puntos)

4. Dado el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ mx + y - 3z = 8 \\ x + my + 7z = 8 \end{cases}$$

   a) ¿Para qué valores de m el sistema es compatible determinado?
   b) Si m=-9, ¿tiene solución el sistema?
   c) Para m=1, ¿tiene solución? En caso afirmativo, calcúlala. (3 puntos)

TEMA 3 2ºB

(1) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -7 & 4a-1 \\ 1 & 1+a & -(a+6) & 3a+1 \\ 0 & a & -6 & 3a-2 \end{array}\right)$

$|A| = [6(1+a) - 7a] - [-a(a+6) - 6a] =$
$= -6 - 6a - 7a - [-a^2 - 6a - 6a] = -6 - 13a + a^2 + 12a =$
$= a^2 - a - 6 = 0 \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

a) Si $a \neq -2, 3$ rg $A = 3 =$ rg $A^* =$ nº inc $\Rightarrow$ SCD

Si $a = -2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{array}\right)$ rg $A = 2 =$ rg $A^* <$ nº inc $\rightarrow$ SCI

$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -9 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 8 + 18 - (10 + 16) = 0$

Si $a = 3$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 11 \\ 1 & 4 & -9 & 10 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \end{array}\right)$ rg $A = 2 \neq$ rg $A^* = 3 \longrightarrow$ SI

$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 28 + 33 - 30 - 21 = 10 \neq 0$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -9+7\lambda \\ 1 & -1 & -5+4\lambda \end{array}\right)$ $z = \lambda$, $|B| = 1$

$x = \frac{\begin{vmatrix} -9+7\lambda & -2 \\ -5+4\lambda & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{9 - 7\lambda - 10 + 8\lambda}{1} = \lambda - 1$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -9+7\lambda \\ 1 & -5+4\lambda \end{vmatrix}}{1} = \frac{-5 + 4\lambda + 9 - 7\lambda}{1} = 4 - 3\lambda$

$(\lambda - 1, 4 - 3\lambda, \lambda)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

c) $a = -3$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -7 & -13 \\ 1 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \end{array}\right)$ SCD

$|A| = (-3)^2 - (-3) - 6 = 9 + 3 - 6 = 6$

$x = \frac{\begin{vmatrix} -13 & -3 & -7 \\ -8 & -2 & -3 \\ -11 & -3 & -6 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$ $\quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -13 & -7 \\ 1 & -8 & -3 \\ 0 & -11 & -6 \end{vmatrix}}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -13 \\ 1 & -2 & -8 \\ 0 & -3 & -11 \end{vmatrix}}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\quad \left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(2) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 0 \\ a & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -a & 2 & 0 \end{array}\right)$

$|A| = (-2a - a^2 + 4) - (-1 - 2a^2 + 4a) = -2a - a^2 + 4 + 1 + 2a^2 - 4a =$
$= a^2 - 6a + 5 = 0 \rightarrow a = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$

Si $a \neq 1, 5$ rg $A = 2 =$ rg $A^* =$ nº inc $\Rightarrow$ SCD $\longrightarrow (0,0,0)$

Si $a = 1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$ rg $A = 2 =$ rg $A^* \Rightarrow$ SCI

$z = \lambda$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\lambda \\ 1 & -1 & -2\lambda \end{array}\right)$ $|B| = -3$

$x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{\lambda + 4\lambda}{-3} = -\frac{5\lambda}{3}$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & -2\lambda \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2\lambda + \lambda}{-3} = \frac{\lambda}{3}$

$\left(-\frac{5\lambda}{3}, \frac{\lambda}{3}, \lambda\right)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Si $a = 5$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right)$ rg $A = 2 =$ rg $A^* \rightarrow$ SCI

$z = \lambda$ $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & -\lambda \\ 5 & -1 & -2\lambda \end{array}\right)$

$x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{5\lambda}{-15} = -\frac{\lambda}{3}$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -\lambda \\ 5 & -2\lambda \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-5\lambda}{-15} = \frac{\lambda}{3}$

$\left(-\frac{\lambda}{3}, \frac{\lambda}{3}, \lambda\right)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

(3) $x + y + z = 225$

$50x + 20y + 10 = 7000$

$x + z = 2y$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 50 & 20 & 10 & 7000 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

SCD

$|A| = (20 - 100 + 10) - (20 - 20 + 50) =$
$= -70 - 50 = -120$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 225 & 1 & 1 \\ 7000 & 20 & 10 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-120} = \frac{-12000}{-120} = 100$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 225 & 1 \\ 50 & 7000 & 10 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-120} = \frac{-9000}{-120} = 75$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 225 \\ 50 & 20 & 7000 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-120} = \frac{-6000}{-120} = +50$$

(4)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ m & 1 & -3 & 8 \\ 1 & m & 7 & 8 \end{array}\right)$$

$|A| = (7 + m^2 + 3) - (1 - 3m - 7m) = m^2 + 10 - 1 + 10m =$

$m^2 + 10m + 9 = 0 \rightarrow m = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{-10 \pm 8}{2} = \begin{cases} -9 \\ -1 \end{cases}$

a) Si $m \neq -1, -9$ $\quad$ rg $A = 3 =$ rg $A^* =$ nº inc $\Rightarrow$ SCD

b) Si $m = -9$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ -9 & 1 & -3 & 8 \\ 1 & -9 & 7 & 8 \end{array}\right)$$
rg $A = 2$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -9 & 1 & 8 \\ 1 & -9 & 8 \end{vmatrix} = 320 \Rightarrow \text{rg } A^* = 3$$

rg $A = 2 \neq$ rg $A^* = 3 \Rightarrow$ SI

No tiene solución

c) $m = 1 \rightarrow$ SCD $\quad |A| = 1 + 10 + 9 = 20$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & -3 \\ 8 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{20} = \frac{120}{20} = 6 \;;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & -3 \\ 1 & 8 & 7 \end{vmatrix}}{20} = \frac{40}{20} = 2 \;;\; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}}{20} = 0$$

$(6, 2, 0)$