CONTROL LÍMITES 1º BACHILLERATO A

1. Estudia la continuidad de la siguiente función, si hay discontinuidades di de qué tipo son.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2}{x+1} & \text{si } x<-1\\ 4x+1 & \text{si } -1\le x\le 2\\ 7x-5 & \text{si } x>2\end{cases}$$

2. Averiguar a,b para que la función f(x) sea continua

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+b}{x-1} & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{4}{x-3} & \text{si } 0<x<1\\ \dfrac{x^2}{ax-1} & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

3. Calcula todas las asíntotas de las siguientes funciones: (2 PUNTOS)

a. $f(x)=\frac{5x^3-7x^2+4x}{x^2-9}$ b. $f(x)=\frac{2x+3}{9x^2-1}$

4. Calcula los siguientes límites: (3 PUNTOS)

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{x-1}$ b. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2-3x}{5x^2+4x-7}\right)^{x^2+7}$ c. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-7}{x+3}-\dfrac{3x^2+5x}{2x-8}\right)$ d. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

5. Dadas las funciones : $f(x)=\sqrt{5x+3}$; $g(x)=\frac{3x-1}{5x+2}$; $h(x) = 5- 4x^2$ (3 PUNTOS) Calcula:

a) Dominio y simetría de las funciones

b) g o f ; (f o g) o h

c) f^{-1} b) g^{-1} Demostrar que es la inversa.

CONTROL LÍMITES 1ºA

① (1) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+2}{x+1} & \text{si } x<-1 \\ 4x+1 & \text{si } -1\leq x\leq 2 \\ 7x-5 & \text{si } x>2 \end{cases}$

Continua porque $-1 \notin (-\infty,-1)$

Continua por ser polinómica en su intervalo de definición

Continua por ser polinómica en su intervalo de definición

En $x=-1$

$f(-1)=-4+1=-3$

$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+2}{x+1} = \frac{3}{0} = -\infty$ Discontinuidad inevitable de salto infinito en $x=-1$

$\lim_{x\to -1^+} 4x+1 = -3$

En $x=2$

$f(2)=9$

$\lim_{x\to 2^-} 4x+1 = 9$

$\parallel$ Continua en $x=2$

$\lim_{x\to 2^+} 7x-5=9$

② (1) $f(x)=\begin{cases} \frac{2x+b}{x-1} & \text{si } x\leq 0 \\ \frac{4}{x-3} & \text{si } 0<x<1 \\ \frac{x^2}{ax-1} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

Continua porque $1 \notin (-\infty,0]$

Continua porque $3 \notin (0,1)$

Depende del valor de a.

En $x=0$

$f(0)=\frac{b}{-1}=-b$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x+b}{x-1} = -b$

$\parallel$ $-b=-\frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{b=\frac{4}{3}}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{4}{x-3} = -\frac{4}{3}$

En $x=1$

$f(1)=\frac{1}{a-1}$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{4}{x-3} = \frac{4}{-2} = -2$

$\parallel$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{ax-1} = \frac{1}{a-1}$

$-2=\frac{1}{a-1}$

$a-1=\frac{1}{-2}$

$a=-\frac{1}{2}+1$

$\boxed{a=\frac{1}{2}}$

Si $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{4}{3}$ continua en $\mathbb{R}$.

③ a) (1) $f(x)=\frac{5x^3-7x^2+4x}{x^2-9}$ Dom f: $\mathbb{R} - \{\pm 3\}$

AV $\lim_{x\to -3} \frac{5x^3-7x^2+4x}{x^2-9} = \frac{-210}{0} = \pm\infty \rightarrow \boxed{x=-3}$

$\lim_{x\to 3} \frac{5x^3-7x^2+4x}{x^2-9} = \frac{84}{0} = \pm\infty \rightarrow \boxed{x=3}$

AH $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{5x^3-7x^2+4x}{x^2-9} = +\infty$ No hay AH

AO $m=\lim_{x\to \pm\infty} \frac{5x^3-7x^2+4x}{x^3-9x} = 5$ $\boxed{y=5x-7}$

$n=\lim_{x\to \pm\infty} \left[\frac{5x^3-7x^2+4x}{x^2-9} - 5x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{5x^3}-7x^2+4x-\cancel{5x^3}+45x}{x^2-9} = -7$

b) $f(x)=\dfrac{2x+3}{9x^2-1}$ Dom $\mathbb{R}-\{\pm 1/3\}$

(1)

AV $\lim\limits_{x\to -1/3} \dfrac{2x+3}{9x^2-1} = \dfrac{7/3}{0} = \pm\infty \longrightarrow \boxed{x=-\frac{1}{3}}$

$\lim\limits_{x\to 1/3} \dfrac{2x+3}{9x^2-1} = \dfrac{11/3}{0} = \pm\infty \longrightarrow \boxed{x=\frac{1}{3}}$

AH $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x+3}{9x^2-1} = 0 \longrightarrow \boxed{y=0}$

AO No tiene porque hay AH

(4) a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2-x}-1}{x-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left[\sqrt{2-x}-1\right]\left[\sqrt{2-x}+1\right]}{(x-1)\left[\sqrt{2-x}+1\right]} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-x-1}{(x-1)(\sqrt{2-x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2-x}+1)}$

(3)

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-1}{\sqrt{2-x}+1} = \dfrac{-1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5x^2-3x}{5x^2+4x-7}\right)^{x^2+7} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{5x^2-3x}{5x^2+4x-7}-1\right](x^2+7)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(-7x+7)}{5x^2+4x-7}\cdot(x^2+7)}$

$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-7x^3-49x+7x^2+49}{5x^2+4x-7}} = e^{-\infty} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2-7}{x+3} - \dfrac{3x^2+5x}{2x-8}\right) = [\infty-\infty] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-8x^2-14x+56-3x^3-9x^2-5x^2-15x}{2x^2-8x+6x-24} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^3-22x^2-29x+56}{2x^2-2x-24} = -\infty$

gr num > gr den.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left[\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right]\left[\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right]}{\left[\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right]} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x-x^2+x}{\left[\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right]}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 1$

gr num = gr den.

(5) a) Dom f: $x\in[-3/5,+\infty)$ $f(-x)=\sqrt{-5x+3}$ No tiene simetría

(1) $5x+3\geq 0 \to x\geq -3/5$

Dom g: $x\in\mathbb{R}-\{-2/5\}$ $f(-x)=\dfrac{-3x-1}{-5x+2}$ No tiene simetría

$5x+2=0 \to x=-2/5$

Dom h: $\mathbb{R}$ Por ser polinómica $f(-x)=5-4x^2=f(x)$ Sim. par.

b) $g\circ f = g(\sqrt{5x+3}) = \dfrac{3\sqrt{5x+3}-1}{5\sqrt{5x+3}+2}$

(1)

$(f\circ g)\circ h = (f\circ g)(5-4x^2) = f\left(\dfrac{3(5-4x^2)-1}{5(5-4x^2)+2}\right) = \sqrt{5\cdot\left(\dfrac{3(5-4x^2)-1}{5(5-4x^2)+2}\right)+3}$

c) f^{-1}

(1) $y = \sqrt{5x+3} \rightarrow x = \sqrt{5y+3} \rightarrow x^2 = 5y+3 \rightarrow y = \frac{x^2-3}{5} = f^{-1}$

$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\frac{x^2-3}{5}\right) = \sqrt{5\left(\frac{x^2-3}{5}\right)+3} = \sqrt{x^2-3+3} = \sqrt{x^2} = x$

g^{-1}

$y = \frac{3x-1}{5x+2} \rightarrow x = \frac{3y-1}{5y+2} \rightarrow x(5y+2) = 3y-1 \rightarrow 5xy - 3y = -1-2x \rightarrow$

$y(5x-3) = -1-2x \rightarrow y = \frac{-1-2x}{5x-3} = g^{-1}$

$(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}\left(\frac{3x-1}{5x+2}\right) = \frac{-1-2\left(\frac{3x-1}{5x+2}\right)}{5\left(\frac{3x-1}{5x+2}\right)-3} = \frac{\frac{-5x-\cancel{2}-6x+\cancel{2}}{\cancel{5x+2}}}{\frac{\cancel{15x}-5-\cancel{15x}-6}{\cancel{5x+2}}} =$

$= \frac{-11x}{-11} = x$