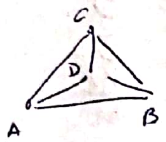
TEMA 4. 2º BACHILLERATO A

1. Calcula el área y el volumen del tetraedro de vértices A(3,-5,-1), B(-7,0,2), C(-4,2,-1), D(-5,-4,0)
2. Dados los vectores $\vec{u} = (-6,2,-3)$, $\vec{v} = (-3,0,-4)$. Calcula:
   a. Los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$
   b. El producto escalar y vectorial de esos dos vectores
   c. El ángulo que forman y La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$
   d. El valor de m para que el vector (-6,1,m) sea ortogonal a $\vec{u}$
   e. Un vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$
   f. El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$
3. Halla un vector $\vec{v}$ coplanario con $\vec{a} = (3,-1,2)$ y con $\vec{b} = (-4,0,-3)$ y que sea ortogonal $\vec{c} = (-2,3,1)$
4. El volumen de un tetraedro es de 24 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los siguientes puntos A(-4,0,8), B(2,-2,6) y C(0,1,3) halla las coordenadas del vértice D sabiendo que está en el eje Y
5. Dos vértices consecutivos de un paralelogramos son A(2,-1,3) y B(-1,0,-3). Si el centro del paralelogramo es E(0,0,1) se pide:
   a. Las coordenadas de los otros vértices.
   b. La longitud de las diagonales
   c. El área del paralelogramo

TEMA 4 2ºA

① $\vec{AB}(-10,5,3)$
$\vec{AC}(-7,7,0)$
$\vec{AD}(-8,1,1)$



$A_1 = \frac{|\vec{AB}\times\vec{AC}|}{2} = \frac{|(-21,-21,-35)|}{2} = \frac{7\sqrt{43}}{2}\ u^2$

$A_2 = \frac{|\vec{AB}\times\vec{AD}|}{2} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -10 & 5 & 3 \\ -8 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{|2,-14,30|}{2} = \frac{10\sqrt{11}}{2}\ u^2$

$A_3 = \frac{|\vec{AC}\times\vec{AD}|}{2} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & 7 & 0 \\ -8 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{|(7,7,49)|}{2} = \frac{7\sqrt{51}}{2}\ u^2$

$A_4 = \frac{|\vec{BC}\times\vec{BD}|}{2} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{|(-16,0,-16)|}{2} = \frac{16\sqrt{2}}{2}\ u^2$

$A_{TOTAL} = 75{,}84\ u^2$

$V = \frac{[\vec{AB}\times\vec{AC}\times\vec{AD}]}{6} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & 5 & 3 \\ -7 & 7 & 0 \\ -8 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{(-10)\cdot 7 - 5(-7) + 3\cdot 49}{6} = \frac{112}{6} = \frac{56}{3}\ u^3$

② $\vec{u}(-6,2,-3)$, $\vec{v}(-3,0,-4)$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{(-6)^2+2^2+(-3)^2} = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7$
$|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-6,2,-3)(-3,0,-4) = 18+12 = 30$

$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-8,-15,6)$

c) $\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{30}{7\cdot 5} \Rightarrow \alpha = 31{,}002°$

d $\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{30}{5} = 6$

d) $(-6,1,m)(-6,2,-3) = 36+2-3m = 0 \longrightarrow 38-3m=0 \quad m = \frac{38}{3}$

e) $\vec{w} = (-8,-15,6)$
$|\vec{w}| = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$
Unitario $\left(\frac{-8}{5\sqrt{13}}, \frac{-36}{5\sqrt{13}}, \frac{6}{5\sqrt{13}}\right)$

f) $\text{Área} = |\vec{u}\times\vec{v}| = |(-8,-36,6)| = \sqrt{325}\ u^2$

③ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3a - b(-1) + c\cdot(-4) = 3a + b - 4c = 0$ $\quad \vec{w}(a,b,c)$

1

$\vec{w}\cdot\vec{c} = 0 \rightarrow (a,b,c)\cdot(-2,3,1) = -2a + 3b + c = 0$

$\left.\begin{matrix} 3a + b - 4c = 0 \\ -2a + 3b + c = 0 \end{matrix}\right\} \quad c = \lambda \qquad \begin{matrix} 3a + b = 4\lambda \\ -2a + 3b = -\lambda \end{matrix} \quad \left\{ \begin{matrix} 6a + 2b = +8\lambda \\ -6a + 9b = -3\lambda \end{matrix} \right.$

$11b = 5\lambda$

$b = \dfrac{5\lambda}{11}$

$3a + \dfrac{5\lambda}{11} = 4\lambda \longrightarrow 3a = 4\lambda - \dfrac{5\lambda}{11}$

$a = \dfrac{44\lambda - 5\lambda}{33} = \dfrac{39\lambda}{33} = \dfrac{13\cdot\lambda}{11}$

Solución $\left(\dfrac{13\lambda}{11}, \dfrac{5\lambda}{11}, \lambda\right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

④ $D(0, y, 0)$

1'5

$\vec{AB}(6,-2,-2)$

$\vec{AC}(4,1,-5)$

$\vec{AD}(4,y,-8)$

$V = \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & -5 \\ 4 & y & -8 \end{vmatrix}}{6} = \dfrac{|-48 - 8y + 40 + 8 + 30y - 64|}{6} = 24$

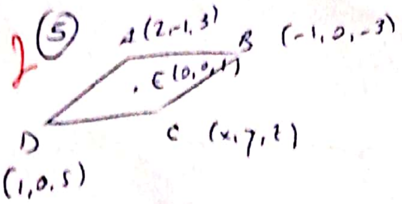
$|-64 + 22y| = 144$

$-64 + 22y = 144 \rightarrow 22y = 144 + 64 = 208 \rightarrow y = \dfrac{208}{22} = \dfrac{104}{11}$

$-64 + 22y = -144 \rightarrow 22y = -80 \rightarrow y = -\dfrac{40}{11}$

$D_1: \left(0, \dfrac{104}{11}, 0\right)$; $D_2\left(0, -\dfrac{40}{11}, 0\right)$

2 ⑤



a) $PM(\vec{AC}) = E = (0,0,1) = \left(\dfrac{2+x}{2}, \dfrac{-1+y}{2}, \dfrac{3+z}{2}\right)$

$x = -2$
$y = 1$
$z = -1$ $\qquad C(-2,1,-1)$

$PM(\vec{BD}) = E = (0,0,1) = \left(\dfrac{-1+x}{2}, \dfrac{0+y}{2}, \dfrac{-3+z}{2}\right)$

$x = 1$
$y = 0$
$z = 5$ $\qquad D(1,0,5)$

b) $|\vec{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$

$|\vec{BD}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 8^2} = \sqrt{68}$

c) $A: |\vec{AB} \times \vec{AB}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = |(-8,-12,2)| = \sqrt{64 + 144 + 4} = \sqrt{212}\ u^2.$