

4. Análisis de funciones irracionales

Piensa y calcula

Halla mentalmente el dominio de la función $y = \sqrt{x^2 - 4}$

4.1. Modelo de función irracional

3 Ejercicio resuelto

Analiza y representa la función $y = \sqrt{x^2 - 4}$

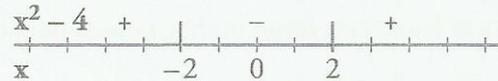
Derivadas: $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}, y'' = -\frac{4}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}}$

1. **Tipo de función:** irracional.

2. **Domnio:** por ser una función irracional de índice par, el radicando tiene que ser mayor o igual que cero.

$x^2 - 4 \geq 0$, se resuelve la ecuación correspondiente $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$. Como las raíces son simples, $x^2 - 4$ cambia de signo en cada una de ellas.

$x^2 - 4 \Rightarrow$ Si $x = 0 \Rightarrow 0^2 - 4 = -4 < 0 (-)$



$\text{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

3. **Continuidad:** es discontinua en $x = -2, x = 2$

• Para $x = -2$, se tiene:

$f(-2) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{x^2 - 4} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{x^2 - 4}$ no existe.

Por tanto, para $x = -2$, la función tiene una discontinuidad de 2ª especie.

• Para $x = 2$, se tiene:

$f(2) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{x^2 - 4}$ no existe $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^2 - 4} = 0$

Por tanto, para $x = 2$, la función tiene una discontinuidad de 2ª especie.

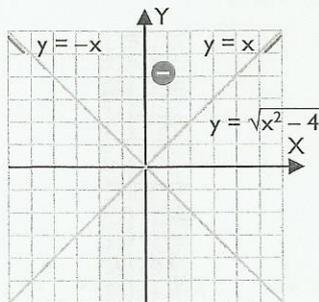
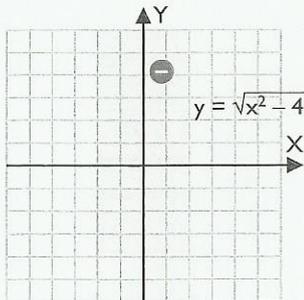
4. **Periodicidad:** no es periódica. Las funciones irracionales nunca lo son.

5. **Simetrías:** $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 4}$

Se observa que $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ función par \Rightarrow simétrica respecto del eje Y

6. **Asíntotas:**

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas



a) $m_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = -1$

$b_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4} + x) = 0 \Rightarrow y = -x$

b) Posición de la gráfica respecto de la asíntota: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4} + x) = 0^-$

La gráfica está debajo de la asíntota.

a) $m_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = 1$

$b_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4} - x) = 0 \Rightarrow y = x$

b) Posición de la gráfica respecto de la asíntota: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4} - x) = 0^-$

La gráfica está debajo de la asíntota.