5 Considera que $\operatorname{sen} 37° = \frac{3}{5}$ y halla las siguientes razones trigonométricas sin utilizar la calculadora:

a. sen 74° c. tg 53° e. cosec 23°
b. cos 18,5° d. sec 127° f. sen 143°

Para realizar esta actividad, se hará uso de las expresiones ya conocidas de las razones trigonométricas de la suma y la diferencia de ángulos, así como de la expresión del ángulo doble y de la expresión del ángulo mitad.

En primer lugar, se hallan el coseno y la tangente del ángulo de 37°, ya que estas razones serán utilizadas con posterioridad:

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos 37° = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 37°} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} 37° = \frac{\operatorname{sen} 37°}{\cos 37°} = \frac{3}{4}$$

a. En este caso, se pide el seno del ángulo doble:

$$\operatorname{sen} 74° = \operatorname{sen}(2 \cdot 37°) = 2 \cdot \operatorname{sen} 37° \cdot \cos 37° = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

b. Se trata del coseno del ángulo mitad:

$$\cos 18{,}5° = \cos\left(\frac{37°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 37°}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

c. Hay que hallar ahora la tangente del ángulo complementario (53° = 90° − 37°):

$$\operatorname{tg} 53° = \operatorname{cotg} 37° = \frac{4}{3}$$

d. Se pide la secante de una suma de ángulos (127° = 37° + 90°). Para hallarla, se determina el coseno y, una vez obtenido, se considera que la secante es la razón inversa:

$\cos 127° = \cos(37° + 90°) =$

$$= \cos 37° \cdot \cos 90° - \operatorname{sen} 37° \cdot \operatorname{sen} 90° = \frac{4}{5} \cdot 0 - \frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{-3}{5}$$

Por tanto: $\sec 127° = \dfrac{1}{\cos 127°} = -\dfrac{5}{3}$

e. Se trata de hallar la cosecante de una diferencia de ángulos (23° = 60° − 37°). Para hacerlo, se calcula el seno y, una vez obtenido, se considera que la cosecante es la razón inversa:

$\operatorname{sen}(23°) = \operatorname{sen}(60° - 37°) = \operatorname{sen} 60° \cdot \cos 37° -$

$$-\cos 60° \cdot \operatorname{sen} 37° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4\sqrt{3}-3}{10}$$

Por consiguiente: $\operatorname{cosec} 23° = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 23°} = \dfrac{10 \cdot (4\sqrt{3}+3)}{39}$

f. Se trata del seno del ángulo suplementario (143° = 180° − 37°); por tanto, coincide con el seno del ángulo de partida:

$$\operatorname{sen} 143° = \operatorname{sen} 37° = \frac{3}{5}$$

6 Demuestra la siguiente identidad trigonométrica:

$$\left[2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 + \operatorname{sen}^2 x - 2\cos x = 2$$

No existe un método general para demostrar la veracidad de una identidad trigonométrica, pero siempre puede resultar de utilidad operar en uno de los miembros para intentar transformarlo en el otro.

$$\left[2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 + \operatorname{sen}^2 x - 2\cos x = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[2\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)^2\right]^2 + \operatorname{sen}^2 x - 2\cos x = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2 \cdot \frac{1+\cos x}{2}\right)^2 + \operatorname{sen}^2 x - 2\cos x = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+\cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x - 2\cos x = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \cancel{2\cos x} + \underbrace{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}_{1} - \cancel{2\cos x} = 2 \Rightarrow 2 = 2$$

7 Resuelve la siguiente ecuación: $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{tg} x = 0$

Para resolver esta ecuación, se desarrolla tanto el seno como la tangente a fin de obtener una expresión más sencilla y con razones trigonométricas más manejables:

$$\operatorname{sen} 2x - \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen} x}{\cos x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x \cdot (2\cos^2 x - 1) = 0$$

La ecuación se resuelve igualando cada uno de los factores a cero:

$$\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360\,k \\ x_2 = 180° + 360\,k \end{cases}$$

$$(2\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 45° + 360\,k \\ x_2 = (180 - 45°) + 360\,k = 135° + 360\,k \\ x_3 = (180 + 45°) + 360\,k = 225° + 360\,k \\ x_4 = (360 - 45°) + 360\,k = 315° + 360\,k \end{cases}$$

8 Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \sqrt{2} \end{cases}$

Los dos ángulos, x e y, son complementarios, pues su suma es 90°. Por tanto: $x = \frac{\pi}{2} - y \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \operatorname{sen} y = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos y + \operatorname{sen} y = \sqrt{2}$

Elevando ambos miembros de esta ecuación al cuadrado, se obtiene:

$(\operatorname{sen} y + \cos y)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 y + 2\operatorname{sen} y \cos y + \cos^2 y = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\operatorname{sen} y \cos y + 1 = 2 \Rightarrow 2\operatorname{sen} y \cos y = 1 \Rightarrow [\operatorname{sen}(2y)] = 1 \Rightarrow$

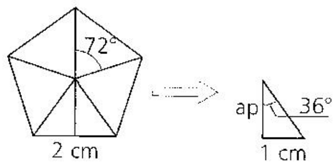
$$\Rightarrow\ 2y = \text{arcsen } 1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \ \Rightarrow\ y = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación del sistema, se tiene: $x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

9 **Calcula el área de un pentágono regular de 2 cm de lado.**

Para calcular la apotema, se considera el triángulo rectángulo cuyos catetos son la apotema y la mitad del lado del pentágono. El ángulo que forma la hipotenusa de dicho triángulo con la apotema de la figura es:

$$\alpha = \frac{\frac{360^\circ}{5}}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$



Aplicando la definición de tangente se tiene que:

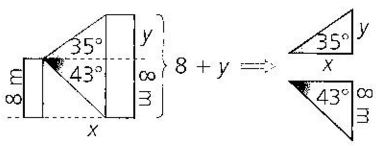
$$\text{tg } 36^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{1}{\text{apotema}} \Rightarrow \text{apotema} = \frac{1}{\text{tg } 36^\circ} \text{ cm}$$

Por tanto, el área de la figura es:

$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{\text{tg } 36^\circ}}{2} = 6{,}88 \text{ cm}^2$$

10 **Una persona se encuentra en la ventana de su apartamento, situada a 8 m del suelo, y observa el edificio de enfrente de modo que ve la parte superior de este con un ángulo de elevación de 35°, y la parte inferior, con un ángulo de depresión de 43°. Determina la altura del edificio que tiene enfrente.**

Para resolver este problema, lo primero que hay que hacer es identificar los triángulos rectángulos que se describen en el enunciado. Para ello, se realiza un esquema de la situación:



En el triángulo rectángulo inferior se conoce el ángulo, 43°, y el cateto opuesto, 8 m. El cateto contiguo, de idéntico valor en los dos triángulos, corresponde a la distancia entre los dos edificios y puede calcularse a partir de estos datos y de la definición de tangente:

$$\text{tg } 43^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{8}{x} \ \Rightarrow\ x = \frac{8}{\text{tg } 43^\circ} \text{ m}$$

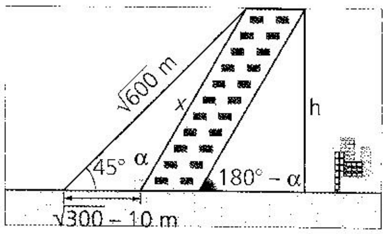
Una vez conocido el valor de x, se utiliza la definición de tangente con el ángulo de 35° para hallar el valor de y:

$$\text{tg } 35^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{y}{x} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y = x \cdot \text{tg } 35^\circ = \frac{8}{\text{tg } 43^\circ} \cdot \text{tg } 35^\circ = 6\text{m}$$

Por tanto, la altura del edificio es: $h = 8 + y = 8 + 6 = 14$ m

11 **Una torre presenta una ligera inclinación a la derecha. Para afianzar su sujeción y evitar que aumente dicha inclinación, se tiende un cable de acero por el lado izquierdo de la torre, desde su cima hasta el suelo. El cable mide $\sqrt{600}$ m y está anclado a una distancia de $\sqrt{300} - 10$ m de la base de la torre, formando un ángulo de 45° con el suelo tal y como muestra la figura:**



a. ¿Cuál es la envergadura de la torre?

b. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la torre (es decir, el ángulo agudo que forma la torre con la horizontal)?

c. ¿A qué altura se encuentra la cima de la torre?

a. A partir de los datos proporcionados en el enunciado del problema, y haciendo uso del teorema del coseno, se puede calcular la envergadura de la torre, x, que coincide con el lado desconocido del triángulo al que se le aplica dicho teorema:

$$x^2 = (\sqrt{600})^2 + (\sqrt{300} - 10)^2 - 2\sqrt{600} \cdot (\sqrt{300} - 10) \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 600 + 300 - 20\sqrt{300} + 100 - 2\sqrt{600} \cdot (\sqrt{300} - 10) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 1000 - 20\sqrt{300} - \sqrt{600} \cdot \sqrt{300} \cdot \sqrt{2} + 10\sqrt{600} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 1000 - 20\sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2} - \sqrt{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4} + 10\sqrt{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 1\,000 - 200\sqrt{3} - 600 + 200\sqrt{3} = \sqrt{400} = 20 \text{ m}$$

La torre tiene, pues, una envergadura de 20 m. (Se ha considerado como solución, obviamente, la raíz positiva.)

b. Para calcular el ángulo de inclinación, primero hay que hallar α. Para ello, se aplica el teorema del seno:

$$\frac{x}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{\sqrt{600}}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{600} \text{ sen } 45^\circ}{x} = \frac{\sqrt{600} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{20} =$$

$$= \frac{\sqrt{1200}}{40} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \begin{cases} 60^\circ \\ 120^\circ \end{cases}$$

De las dos soluciones posibles, se toma $\alpha = 120°$, ya que para que la torre esté inclinada hacia la derecha, como se afirma en el enunciado del problema, α debe ser mayor que 90°.

Por tanto, el ángulo de inclinación es: $180 - 120 = 60°$

c. La altura a la que se encuentra la cima de la torre se calcula a partir de las razones trigonométricas para triángulos rectángulos. En este caso, se aplica la definición de seno:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{h}{20} \Rightarrow h = 20 \text{ sen } 60^\circ = 10\sqrt{3} \text{ m}$$

Por tanto, la cima de la torre está situada a una altura de: $10\sqrt{3}$ m $= 17{,}32$ m