Se considera la función $f(x)$ definida del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Se desea saber si es continua en todos los puntos o deja de serlo en alguno.

Estudia la continuidad de las siguientes funciones, represéntalas gráficamente y di cuáles son sus límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } 1 \le x \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \le 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 0 & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$

S Representa gráficamente la función $f(x)$ y estudia su continuidad:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ x - 5 & \text{si } 5 \le x \le 10 \end{cases}$$

S Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + b & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

calcula el valor de b para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$. ¿Es continua en $x = 1$?

S Representa, estudia la continuidad y halla los límites para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

S Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Estudia su continuidad y represéntala gráficamente.

27 S Dada $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

Estudia su continuidad y represéntala.

28 S El número de individuos, en millones, de una población, viene dado por la función:

$P(t) = \dfrac{15 + t^2}{(t+1)^2}$, donde t se mide en años transcurridos desde $t = 0$.

Calcula la población inicial y el tamaño de la población a largo plazo.

29 S Una empresa ha establecido para sus empleados un incentivo (en cientos de euros) en relación con el valor x (en cientos de euros) de lo vendido por cada uno. Dicho incentivo sigue la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}01\,x & \text{si } 0 \le x \le 100 \\ \dfrac{30x}{2x + 2\,300} & \text{si } x > 100 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$. Indicar si el incentivo recibido por un empleado es sensiblemente distinto si el valor de las ventas es ligeramente superior o inferior a 10 000 €.

b) ¿Cuál es la cantidad máxima que un empleado podría recibir como incentivo si sus ventas fueran muy grandes? Justifica tu respuesta.

30 S Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, durante los próximos años, por la función

$f(t) = \dfrac{15\,000t + 10\,000}{2t + 2}$, siendo t el número de años transcurridos. Se pide:

a) Tamaño actual de la población.

b) ¿Cómo evoluciona el tamaño de la población entre los años 4 y 9?

c) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Justifica la respuesta.