TEMA 5 2º BACH A

1. Se considera el punto A (2, -2, 3) y la recta r: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.

b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

2. Se considera el punto P (4,-1,0), el plano π : $3x - 3y + z - 5 = 0$ y la recta siguiente

r: $x - 3 = 2y = \frac{4-z}{-2}$. Calcula los puntos R de la recta, de manera que la recta que pasa por P y R es paralela al plano dado.

3. Se emite un rayo láser desde el punto P (-1,2,-5) en la dirección $\vec{v} = (-1,2,3)$.

El plano π: $-x - 2y + 3z = -8$ determina la posición de una lámina de grandes dimensiones.

a) Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser.

b) Determina la posición relativa de rayo y lámina.

c) Se quiere situar otra lámina que sea ortogonal al rayo y pase por el origen. Calcula la ecuación del plano de esta lámina.

4. Consideramos la recta r: $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2x - 3z = 2 \end{cases}$ $y\ el\ plano\ \pi: x - y + 2z = 12$

a) Calcula el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano dado.

b) Calcular la posición relativa de la recta r y el plano π. Si son secantes, averigua el punto de intersección.

5. Dados los siguientes planos: $\begin{cases} \pi_1: x - 3y + z = 11 \\ \pi_2: 2x - 6y + 2z = 5 \\ \pi_3: 4x - 12y + 6z = -35 \end{cases}$ estudia la posición relativa, determinando en el caso de que sea posible, el punto, la recta o el plano de intersección.

TEMA 5 2º BACH A

1. Se considera el punto A (1, -2, 0) y la recta r: $\begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.

b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

2. Se considera el punto P (-5,1,0), el plano π : $2x - 3y + z - 5 = 0$ y la recta siguiente

r: $x - 3 = y = \frac{3-z}{-2}$. Calcula los puntos R de la recta, de manera que la recta que pasa por P y R es paralela al plano dado.

3. Se emite un rayo láser desde el punto P (1,2,8) en la dirección $\vec{v} = (1,2,-3)$.

El plano π: $-x - y + 3z = -8$ determina la posición de una lámina de grandes dimensiones.

a) Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser.

b) Determina la posición relativa de rayo y lámina.

c) Se quiere situar otra lámina que sea ortogonal al rayo y pase por el origen. Calcula la ecuación del plano de esta lámina.

4. Consideramos la recta r: $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 4z = -1 \end{cases}$ $y\ el\ plano\ \pi: x - y + 3z = 12$

a) Calcula el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano dado.

b) Calcular la posición relativa de la recta r y el plano π. Si son secantes, averigua el punto de intersección.

5. Dados los siguientes planos: $\begin{cases} \pi_1: x - 3y + z = 11 \\ \pi_2: 2x - 6y + 8z = 5 \\ \pi_3: 4x - 12y + 16z = -35 \end{cases}$ estudia la posición relativa, determinando en el caso de que sea posible, el punto, la recta o el plano de intersección.

TEMA 5

① $A(2,-2,3)$ $\quad r: \begin{cases} 2x-y=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$

a) $\vec{v}_r : \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (3,6,2) = \vec{n}$

$\pi: 3x+6y+2z+D=0$

$3\cdot 2+6\cdot(-2)+2\cdot 3+D=0 \Rightarrow 6-12+6+D=0 \Rightarrow D=0$

$\boxed{\pi: 3x+6y+2z=0}$

b) Si contiene a r, también a $R(-1,-2,0)$ y a $\vec{v}_r$

$\vec{AR}(-3,0,-3)$

$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\pi: 18(x-2)-3(y+2)-18(z-3)=0$

$18x-36-3y-6-18z+54=0$

$\boxed{\pi: 18x-3y-18z+12=0} \rightarrow \boxed{\pi: 6x-y-6z+4=0}$

② $P(4,-1,0)$ $\quad \pi: 3x-3y+z-5=0$, $r: x-3=2y=\frac{4-z}{-2} \Rightarrow x-3=\frac{y}{1/2}=\frac{z-4}{2}$

$r: \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=\frac{1}{2}\lambda \\ z=4+2\lambda \end{cases}$ $\quad R(3+\lambda, \frac{1}{2}\lambda, 4+2\lambda)$

$\vec{PR}(3+\lambda-4, \frac{1}{2}\lambda+1, 4+2\lambda) = (\lambda-1, \frac{\lambda}{2}+1, 4+2\lambda) = \vec{v}_r$

$\vec{n}(3,-3,1)$

$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow (\lambda-1, \frac{\lambda}{2}+1, 4+2\lambda)(3,-3,1)=0$

$3\lambda-3-\frac{3\lambda}{2}-3+4+2\lambda=0$

$6\lambda-6-3\lambda-6+8+4\lambda=0$

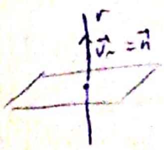
$7\lambda-4=0 \rightarrow \lambda=\frac{4}{7}$

$R(\frac{4}{7}+3, \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}, 4+2\cdot\frac{4}{7}) = (\frac{25}{7}, \frac{4}{14}, \frac{36}{7})$

③ $P(-1,2,-5)$ $\quad \vec{v}(-1,2,3)$ $\quad \pi: -x-2y+3z=-8 \rightarrow \vec{n}(-1,-2,3)$

a) $r: \begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=-5+3\lambda \end{cases}$

b) $\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (-1,2,3)(-1,-2,3) = 1-4+9 = 6 \neq 0$ Son secantes

c) 

$\vec{v}_r(-1,2,3)=\vec{n}$ Pasa por $(0,0,0)$

$\pi: -x+2y+3z+D=0$

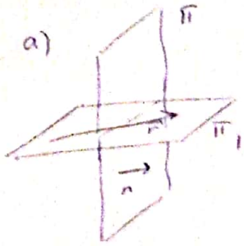
$D=0$

$\pi: -x+2y+3z=0 \rightarrow \boxed{\pi: x-2y-3z=0}$

(4)

$r: \begin{cases} x-3y=4 \\ 2x-3z=2 \end{cases}$ $\qquad \pi: x-y+2z=12 \qquad \vec{n}(1,-1,2)$

a)



$\vec{v_r}: \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (9,3,6) \qquad R(4,0,2)$

$\pi_1: \begin{vmatrix} x-4 & y & z-2 \\ 9 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$12(x-4) - 12(y) + (-12)(z-2) = 0$

$12x - 48 - 12y - 12z + 24 = 0$

$12x - 12y - 12z - 24 = 0$

$\boxed{\pi: x - y - z - 2 = 0}$

b) $\vec{v_r} \cdot \vec{n} = (9,3,6)(1,-1,2) = 9-3+12 = 18 \neq 0$ Secants

$r: \begin{cases} x = 4+9\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2+6\lambda \end{cases}$

$(4+9\lambda) - (3\lambda) + 2(2+6\lambda) = 12$

$4+9\lambda - 3\lambda + 4 + 12\lambda = 12$

$18\lambda + 8 = 12$

$18\lambda = 4 \rightarrow \lambda = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

$Q\left(6, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$

(5)

$\pi_1: x-3y+z-11=0$

$\pi_2: 2x-6y+2z-5=0$

$\pi_3: 4x-12y+6z+35=0$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -11 \\ 2 & -6 & 2 & -5 \\ 4 & -12 & 6 & 35 \end{array}\right)$

$|M| = (-36-24-24) - (-24-24-36) = 0 \Rightarrow rg\ M = 2$

$|M^*| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -11 \\ -6 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & 35 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\ M^* = 3$

Si $rg\ M = 2 \neq rg\ M^* = 3$

$\pi_1 \parallel \pi_2$

Dos paralelos cortan al tercero.

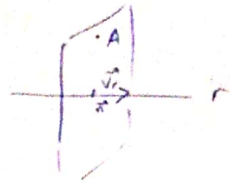
π_1 y π_3: $r: \begin{cases} x-3y+z-11=0 \\ 4x-12y+6z+35=0 \end{cases}$

π_2 y π_3: $s: \begin{cases} 2x-6y+2z-5=0 \\ 4x-12y+6z+35=0 \end{cases}$

TEMA 5 2º Bach A

(1) $A(1,-2,0)$ $r: \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$

a) $\vec{v_r} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-3,3,1) = \vec{n}$



$\pi: -3x+3y+z+D=0$

$-3\cdot 1+3(-2)+0+D=0 \Rightarrow -3-6+D=0 \Rightarrow D=9$

$\boxed{\pi: -3x+3y+z+9=0} \rightarrow \boxed{\pi: 3x-3y-z-9=0}$

b) Si contiene a r, también a $R(2,-2,0)$, y a $\vec{v_r}$

$\vec{AR}(1,0,0)$

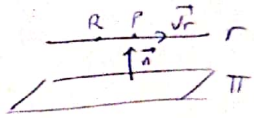
$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\pi: 0(x-1)-1(y+2)+3z=0$

$\pi: -y-2+3z=0 \Rightarrow \boxed{\pi: y-3z+2=0}$

(2) $P(-5,1,0)$, $\pi: 2x-3y+z-5=0$, $r: x-3=y=\frac{3-z}{-2} \Rightarrow x-3=y=\frac{z-3}{2}$

$r: \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases}$ $R(3+\lambda, \lambda, 3+2\lambda)$



$\vec{PR} = (8+\lambda, \lambda-1, 3+2\lambda) = \vec{v_r}$ $\vec{n}(2,-3,1)$

$\vec{v_r}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow (8+\lambda, \lambda-1, 3+2\lambda)(2,-3,1)=0$

$16+2\lambda-3\lambda+3+3+2\lambda=0$

$\lambda+22=0 \rightarrow \lambda=-22$

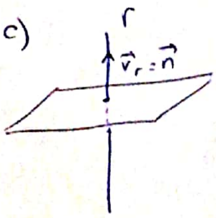
$R(3-22, -22, 3-44) = (-19, -22, -41)$

(3) $P(1,2,8)$ $\vec{v}(1,2,-3)$, $\pi: -x-y+3z+8=0 \rightarrow \vec{n}(-1,-1,3)$

a) $r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=8-3\lambda \end{cases}$

b) $\vec{v_r}\cdot\vec{n} = (1,2,-3)(-1,-1,3) = -1-2-9 = -12 \neq 0$ Son secantes

c)



$\vec{v_r} = (1,2,-3) = \vec{n}$

Pasa por $O(0,0,0)$

$\pi_1: x+2y-3z+D=0$

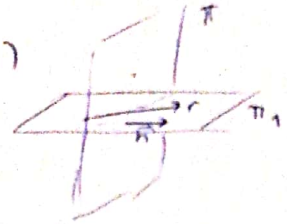
$0+2\cdot 0-3\cdot 0+D=0 \Rightarrow D=0$

$\pi_1: x+2y-3z=0$

Escaneado con CamScanner

(4) $r: \begin{cases} 2x-y=5 \\ 3x-4z=-1 \end{cases}$ $\quad \pi: x-y+3z=12 \quad \vec{n}\ (1,-1,3)$

a)



$\vec{v_r}: \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (4,+8,3) \qquad R=(1,-3,1)$

$\pi_1: \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 4 & 8 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$27(x-1) - 9(y+3) + (-12)(z-1) = 0$

$27x - 27 - 9y - 27 - 12z + 12 = 0$

$\pi_1: 27x - 9y - 12z - 42 = 0$

$\boxed{\pi_1: 9x - 3y - 4z - 14 = 0}$

b) $\vec{v_r} \cdot \vec{n} = (4,8,3)(1,-1,3) = 4-8+9 = 5 \neq 0$ secantes

$r: \begin{cases} x = 1+4\lambda \\ y = -3+8\lambda \\ z = 1+3\lambda \end{cases}$ $\quad (1+4\lambda) - (-3+8\lambda) + 3(1+3\lambda) = 12$

$1+4\lambda+3-8\lambda+3+9\lambda = 12$

$5\lambda = 5 \rightarrow \lambda = 1$

$Q(5,5,4)$

(5) $\pi_1: x-3y+z-11=0$

$\pi_2: 2x-6y+8z-5=0$

$\pi_3: 4x-12y+16z+35=0$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -11 \\ 2 & -6 & 8 & -5 \\ 4 & -12 & 16 & 35 \end{array}\right)$

$|M| = 0 \quad rg\, M = 2$

$|M^*| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -11 \\ -6 & 8 & -5 \\ -12 & 16 & 35 \end{vmatrix} = -810 \neq 0 \quad rg\, M^* = 3$

Si $rg\, M = 2 \neq rg\, M^* = 3$

. Dos paralelos cortan al tercero

$\pi_2 \parallel \pi_3$

π_1 y π_2 se cortan en una recta $r: \begin{cases} x-3y+z-11=0 \\ 2x-6y+8z-5=0 \end{cases}$

π_1 y π_3 se cortan en una recta $s: \begin{cases} x-3y+z-11=0 \\ 4x-12y+16z+35=0 \end{cases}$