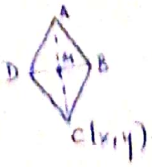
CONTROL TEMA 4 1º BACH A

1. De un rombo ABCD conocemos las coordenadas de tres vértices A (es el origen de coordenadas), B(4,1)y D(1,4).Calcula las coordenadas del vértice C .
2. Dos vértices de un triángulo equilátero son A(3,1) y B(5,-2). Calcula cuales pueden ser las coordenadas del vértice que falta.
3. Dado el triángulo de vértices A(-4,8), B(6,-7) y C(-3,5)
   a. Clasifícalo según sus lados
   b. Determina si es rectángulo
   c. Calcula las coordenadas de los puntos medios de los lados.
   d. Las coordenadas del baricentro. (2 puntos)
4. Dados los vectores $\vec{u}\ (5,-2),\ \vec{v}\ (-3{,}1)$ y $\vec{w}\ (k,-4),\quad calcula$:
   a. El producto escalar de $\vec{u}\cdot\vec{v}$
   b. Los módulos de $\vec{u},\vec{v}$
   c. La proyección de $\vec{u}\ \ sobre\ \vec{v}$
   d. La proyección de $\vec{v}\ \ sobre\ \vec{u}$
   e. El valor de k para que $\vec{u}\ \ sea\ perpendicular\ a\ \vec{w}$
   f. El valor de k para que $\vec{v}\ \ sea\ proporcional\ a\ \ \vec{w}$
   g. El ángulo que forman $\vec{u}\ \ y\ \vec{v}$
   h. Si k= -5, calcular $-3\vec{u}-6(\,-2\vec{v}-5\,\vec{w})$
   i. Normaliza los vectores $\vec{u},\vec{v}$
   j. Calcula k para que $\vec{u}$ forme un ángulo de 60º con $\vec{w}$ (3 puntos)
5. Dados los puntos A(1,-3), B(-2,5), C(-4,k) calcula el valor de k para que:
   a. Los tres puntos estén alineados y para que los tres puntos no estén alineados.
   b. El punto B sea el punto medio entre A y C
   c. El vector $\overrightarrow{AB}$ forme un ángulo de 30º con $\overrightarrow{AC}$
   d. Calcula el simétrico de A respecto de B (2 puntos)
6. Sabiendo que el vector $\vec{u}$ es perpendicular a $\vec{v}$= (8,6) y que el módulo del vector $\vec{u}$ es $\sqrt{50}$. Calcula las coordenadas de ese vector $\vec{u}$.

TEMA 4. 1ºBACH A 2022-23

① $A(0,0)$
$B(4,1)$
$D(1,4)$
C ?

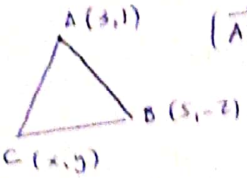


$M = PM(\overline{BD}) = \left(\frac{4+1}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$M = PM(\overline{AC}) = \left(\frac{0+x}{2}, \frac{0+y}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 5$

$\frac{y}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow y = 5$

Luego $C(5,5)$

② 

$|\vec{AB}| = |\vec{BC}| = |\vec{AC}|$ Por ser equilátero

$\vec{AB} = (2,-3) \rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$\vec{BC} = (x-5, y+2) \rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{(x-5)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{13}$

$\vec{AC} = (x-3, y-1) \rightarrow |\vec{AC}| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{13}$

$\sqrt{(x-5)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{13} \rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4 = 13 \rightarrow x^2 - 10x + y^2 + 4y + 16 = 0$

$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{13} \rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 13 \rightarrow x^2 - 6x + y^2 - 2y - 3 = 0$

$\sqrt{(x-5)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} \rightarrow \cancel{x^2} - 10x + 25 + \cancel{y^2} + 4y + 4 = \cancel{x^2} - 6x + 9 + \cancel{y^2} - 2y + 1$

$\boxed{-4x + 6y + 19 = 0} \rightarrow x = \frac{6y+19}{4}$

$\left(\frac{6y+19}{4}\right)^2 - 10 \cdot \frac{6y+19}{4} + y^2 + 4y + 16 = 0$

$\frac{36y^2 + 228y + 361}{16} - \frac{60y + 190}{4} + y^2 + 4y + 16 = 0$

$36y^2 + 228y + 361 - 240y - 760 + 16y^2 + 64y + 256 = 0$

$52y^2 + 52y - 143 = 0$

$y = 1,23 \rightarrow x = 6,6$ $\quad C_1(6,6 ; 1,23)$

$y = -2,23 \rightarrow x = 1,405$ $\quad C_2(1,41 ; -2,23)$

③ $A(-4,8)$, $B(6,-7)$, $C(-3,5)$

a) $|\vec{AB}| = |(10,-15)| = \sqrt{100+225} = \sqrt{325}$ Triángulo escaleno.

$|\vec{BC}| = |(-9,12)| = \sqrt{81+144} = \sqrt{225}$

$|\vec{AC}| = |(1,-3)| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

b) Al ser $|\vec{AB}|$ la mayor medida, si lo es, debe ser la hipotenusa. Luego, el ángulo recto deberá ser en C. Comprobarlo:

$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (-1,3)(9,-12) = -9 + 36 = 25 \neq 0$ No es rectángulo

c) $PM(\overline{AB}) = \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{8-7}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

$PM(\overline{AC}) = \left(\frac{-4-3}{2}, \frac{8+5}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right)$

$PM(\overline{BC}) = \left(\frac{6-3}{2}, \frac{-7+5}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -1\right)$

d) Coordenadas Baricentro $= \left(\frac{-4+6-3}{3}, \frac{8-7+5}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, 2\right)$

(4) $\vec{u}(5,-2)$, $\vec{v}(-3,1)$, $\vec{w}(k,-4)$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (5,-2)(-3,1) = -15-2 = -17$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{5^2+(-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

c) $Proy_{\vec{v}}\vec{u} = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \dfrac{17}{\sqrt{10}} = \dfrac{17\sqrt{10}}{10}$

d) $Proy_{\vec{u}}\vec{v} = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|} = \dfrac{17}{\sqrt{29}} = \dfrac{17\sqrt{29}}{29}$

e) $\vec{u}\perp\vec{w} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (5,-2)(k,-4) = 5k+8=0 \rightarrow \boxed{k=-\frac{8}{5}}$

f) $\vec{v}$ prop. a $\vec{w} \Rightarrow \vec{v} = a\vec{w} \Rightarrow (-3,1) = a(k,-4) \rightarrow \begin{matrix} -3=ak \\ 1=-4a \end{matrix} \rightarrow a=-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow -3 = -\frac{1}{4}\cdot k \rightarrow \boxed{k=12}$

g) $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{17}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{10}} \longrightarrow \alpha = 3{,}37°$

h) $-3\vec{u} - 6(-2\vec{v} - 5\vec{w}) = -3(5,-2) - 6[-2(-3,1) - 5(-5,-4)] =$

$= (-15,6) - 6[(6,-2) - (-25,-20)] = (-15,6) - 6[(31,18)] = (-201,-102)$

i) $\|\vec{u}\| = \left(\frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}\right)$, $\|\vec{v}\| = \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

j) $\cos 60° = \dfrac{|(5,-2)(k,-4)|}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{k^2+16}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{|5k+8|}{\sqrt{29(k^2+16)}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2|5k+8| = \sqrt{29(k^2+16)}$

$4(25k^2+80k+64) = 29(k^2+16) \Rightarrow 71k^2+320k-208=0$

$k_1=0{,}58$; $k_2=-5{,}08$

(5) $A(1,-3)$, $B(-2,5)$, $C(-4,k)$

a) $\vec{AB} = k\vec{AC} \rightarrow (-3,8) = a(-5,k+3) \rightarrow \begin{matrix} -3=-5a \\ 8=a(k+3) \end{matrix} \rightarrow \boxed{a=\frac{3}{5}}$

$\rightarrow 8 = \frac{3}{5}(k+3) \rightarrow \frac{40}{3} = k+3$ $\boxed{k=\frac{31}{3}}$

*

b) $D = PM(\vec{AC}) = (-\frac{3}{2}, 7) = \left(\frac{1-4}{2}, \frac{-3+k}{2}\right) \Rightarrow 7 = \frac{-3+k}{2} \rightarrow \boxed{k=17}$

c) $\cos 30° = \dfrac{|\vec{AB}\cdot\vec{AC}|}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} \rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{|(-3,8)(-5,k+3)|}{\sqrt{9+64}\cdot\sqrt{25+(k+3)^2}} \Rightarrow \sqrt{3}\cdot\sqrt{73}\cdot\sqrt{25+(k+3)^2} = 2\cdot|15+8k+24|$

$\Rightarrow 3\cdot 73\,(25+(k+3)^2) = 4\,(39+8k)^2 \Rightarrow 37k^2+1182k-1362=0$ $\begin{matrix} \nearrow k_1=1{,}11 \\ \searrow k_2=-33{,}06 \end{matrix}$

d) A B A' — $(1,-3)$ $(-2,5)$ (x,y)

$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y-3}{2}\right) = (-2,5) \rightarrow \begin{matrix} \frac{x+1}{2}=-2 \rightarrow x=-4-1=-5 \\ \frac{y-3}{2}=5 \rightarrow y=10+3=13 \end{matrix}$ $A'(-5,13)$

(6) $\vec{u}\perp\vec{v}$, $|\vec{u}|=\sqrt{50}$

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{50} \Rightarrow x^2+y^2=50$

$(x,y)(8,6)=0 \Rightarrow 8x+6y=0$

$x = \frac{-6y}{8} = \frac{-3y}{4}$

$\left(-\frac{3y}{4}\right)^2 + y^2 = 50 \Rightarrow \frac{9y^2}{16} + y^2 = 50$

$9y^2+16y^2 = 800 \Rightarrow 25y^2 = 800 \Rightarrow y^2 = 32$

$y = \pm\sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2}$ $\rightarrow y_1=4\sqrt{2} \rightarrow x_1=-3\sqrt{2}$; $y_2=-4\sqrt{2} \rightarrow x_2=3\sqrt{2}$

$$\boxed{\begin{matrix} \vec{u}_1(-3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}) \\ \vec{u}_2(3\sqrt{2}, -4\sqrt{2}) \end{matrix}}$$

*5a) $\vec{AB} = a\vec{BC} \rightarrow (-3,8) = a(-2,k-5) \rightarrow -3=-2a \rightarrow a=\frac{3}{2}$

$8 = a(k-5) \rightarrow 8 = \frac{3}{2}(k-5) \rightarrow k = \frac{16}{3}+5 = \frac{31}{3}$