

TEMA 1. MATRICES

1. Realiza la siguiente operación matricial

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -8 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Siendo $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, calcula $A + A^t - I$

3. Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula:

a. $3A - B + 2C$

b. $2C + B - 4 \cdot A$

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ calcula

a) $A+B$ b) $A-B$ c) $A-2B$ d) $2A+3B$

5. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, calcula si es posible:

a. $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $2A \cdot 3B$ d) $(-2B) \cdot A$

6. Se consideran las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Realiza si es posible los siguientes productos

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $B \cdot C$ d) $C \cdot B$

7. Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcula si es posible:

a) $A \cdot B \cdot C$ b) $A \cdot C^t + B$ c) $B^t \cdot A - C$ d) $B \cdot C \cdot A$ e) $A^t \cdot C^t$ f) $B^t \cdot C^t$

8. Comprueba que estas matrices son conmutables $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

9. Encuentra la expresión general de todas las matrices que conmuten con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ encuentra una matriz B que conmute con la matriz A que sea triangular superior y cuya suma de los elementos de su diagonal principal sea 2.

11. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ calcula las matrices B tales que $A \cdot B = B \cdot A^t$

12. Halla todas las matrices M de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que cumplen la ecuación $M^2 - 2M = 3I$

13. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$ calcula los valores de m y n para los que se cumple que $(I + A)^3 = mI + nA$, donde I es la matriz identidad.

14. Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, calcula

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $A^t \cdot B$

15. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Calcula A^{41}

16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcula:
- Demuestra que A y B son conmutables.
 - Calcula la potencia n-ésima de A.
17. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula las matrices A^2, A^3, A^4, A^5 . Obtener razonadamente A^n para $n > 5$
18. Se dice que una matriz cuadrada es idempotente cuando se cumple que su cuadrado es igual a ella misma, es decir $A^2 = A$.
- Escribe algún ejemplo de matriz cuadrada de orden 3, distinta de la matriz nula y de la matriz unidad, que sea idempotente.
 - Calcula el valor de m para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ m & -3 \end{pmatrix}$ sea idempotente.
 - Encuentra todas las matrices del tipo $\begin{pmatrix} 1 & m \\ n & 0 \end{pmatrix}$ que sean idempotentes.
19. Usando el método de Gauss calcula el rango de las matrices A y B
- $$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
20. Halla el rango de las siguientes matrices:
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$
21. Calcula el valor de a para que la matriz tenga rango 2
- $$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
22. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \\ a & a+7 & a+8 \end{pmatrix}$. Discute su rango en función del parámetro a.
23. Determina por el método de Gauss-Jordan la inversa de estas matrices y comprueba que lo son:
- $$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
24. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ calcula:
- A^{-1}
 - B^{-1}
 - $(A \cdot B)^{-1}$
25. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ calcula la matriz X tal que $AX=B$
26. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación $XA=B$
27. Resuelve matricialmente la ecuación $A^t \cdot X - B = 0$ siendo
- $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
28. Determina una matriz X que cumple la ecuación $X \cdot A + A = 2A^t$ siendo
- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

29. Determina la matriz X que cumpla la igualdad $A + X = 2B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

30. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ calcula la matriz X que cumple que $2A - 5X = B$

31. Considera las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ determina la matriz X que verifica $A - A^2 = A \cdot B - X$

32. Encuentra una matriz X de orden 2 que cumpla que $A + X = A \cdot X + X \cdot A$ donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

33. Resuelve la ecuación matricial $XA + AX = B$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

34. Determina la matriz X que verifica la ecuación $(X - I)B = A$ donde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

35. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

a. Determina los valores de m para los que la ecuación $AX - A^t = A$ tiene solución.

b. Resuelve la ecuación $AX - A^t = A$ para $m=0$.

36. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ calcula una matriz X que verifique la ecuación $X + XA = B^t$

37. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a. Calcula la matriz A^{-1}

b. Resuelve la ecuación $AXA = A^2 + A$

38. Calcula la matriz X que cumple que $XB + A = B + A^2$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

39. Resuelve los siguientes sistemas matriciales

a.
$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} X + 3Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \\ X + Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 3X + Y = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

40. Encuentra las matrices A y B sabiendo que cumplen las siguientes condiciones

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

41. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Calcula las matrices X e Y que verifiquen este sistema de ecuaciones matriciales

$$\left. \begin{aligned} AX + BY &= C \\ AX &= Y \end{aligned} \right\}$$

42. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a. Calcula A^n

b. Halla la matriz X que verifica la ecuación $X \cdot (A^4 + A^2 - A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

43. Determina todas las matrices diagonales que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

44. Discute en función del parámetro m, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

45. Calcula cuando es invertible la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix}$

46. Di cuándo es regular la matriz $M = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix}$

47. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ Halla las matrices X e Y que verifican el sistema siguiente:

$$\left. \begin{aligned} 3X + Y &= A \\ 4X + 2Y &= B \end{aligned} \right\}$$

48. Halla las matrices X e Y, cuadradas de orden 2, que resuelven el sistema siguiente

$$\left. \begin{aligned} 2X + Y &= A^2 \\ X - Y &= A^{-1} \end{aligned} \right\} \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

49. Halla las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ que verifican la ecuación $X^2 - X = 2I$

50. Determina el rango de la matriz A por Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & 6 & 2 \\ 4 & -5 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$