

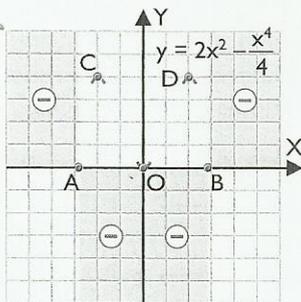
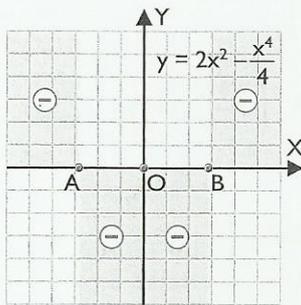
2. Análisis de funciones polinómicas

■ Piensa y calcula

Halla los puntos de corte con el eje X de la función $y = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$ y estudia su multiplicidad.

Características de las funciones polinómicas

- Están definidas en toda la recta real \mathbb{R}
- Son continuas en toda la recta real \mathbb{R}
- Nunca son periódicas.
- No tienen asíntotas.
- Cortan al eje X, a lo sumo, en tantos puntos como indique el grado.
- El número de máximos y mínimos relativos es, a lo sumo, igual al grado menos uno.
- El número de puntos de inflexión es, a lo sumo, igual al grado menos dos.



2.1. Modelo de función polinómica

1 Ejercicio resuelto

Analiza y representa la función $y = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$

Derivadas: $y' = 4x - x^3$, $y'' = 4 - 3x^2$, $y''' = -6x$

1. **Tipo de función:** polinómica.

2. **Dominio:** por ser una función polinómica, es toda la recta real \mathbb{R}

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

3. **Continuidad:** por ser polinómica, es continua en toda la recta real \mathbb{R}

4. **Periodicidad:** no es periódica porque las funciones polinómicas nunca lo son.

5. **Simetrías:** $f(-x) = 2(-x)^2 - \frac{(-x)^4}{4} = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$

Se observa que $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ función par \Rightarrow simétrica respecto del eje Y

6. **Asíntotas:** las funciones polinómicas no tienen asíntotas.

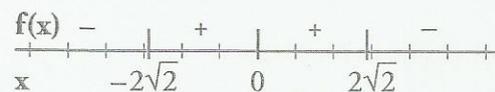
7. **Corte con los ejes:**

• **Eje X:** $2x^2 - \frac{x^4}{4} = 0 \Rightarrow x = 0$, raíz doble; $x_1 = 2\sqrt{2}$, $x_2 = -2\sqrt{2}$, raíces simples.

Se obtienen los puntos $O(0, 0)$, $A(-2\sqrt{2}, 0)$, $B(2\sqrt{2}, 0)$

• **Eje Y:** es el punto $O(0, 0)$

Signo: Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} > 0 (+)$



8. **Máximos y mínimos relativos:**

$f'(x) = 4x - x^3 \Rightarrow 4x - x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, raíces simples.

$f(x) = 2x^2 - \frac{x^4}{4} \Rightarrow f(-2) = 4 \Rightarrow C(-2, 4)$

$$f(0) = 0 \Rightarrow O(0, 0)$$

$$f(2) = 4 \Rightarrow D(2, 4)$$

$f''(x) = 4 - 3x^2 \Rightarrow f''(-2) = -8 < 0 (-) \Rightarrow C(-2, 4)$, máximo relativo.

$f''(0) = 4 > 0 (+) \Rightarrow O(0, 0)$, mínimo relativo.

$f''(2) = -8 < 0 (-) \Rightarrow D(2, 4)$, máximo relativo.

Monotonía:

$f'(x) = 4x - x^3 \Rightarrow$ Si $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 4 - 1 = 3 > 0 (+)$

