TEMA 7. 2º BACH A

1. Calcula el valor de a$\in \mathbb{R}$ para el cual: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}\right)^{\frac{ax^3+1}{x^2-1}} = 1$ (1 punto)
2. Demostrar que la ecuación $e^{-x} + 2 = x$ tiene al menos una solución real. (1,5 puntos)
3. Sea la función $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$. ¿Se puede afirmar que existe al menos una solución en el intervalo $[1,2]$ (1,5 puntos)
4. Estudia la continuidad de la siguiente función y si las hay, di de qué tipo son las discontinuidades.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x+3} \; si\, x < -2 \\ x^2 + 2x + 4 \quad si -2 \leq x < 1 \\ |x-7| \;\; si\, x \geq 1 \end{cases}$$ (2 puntos)
5. Calcula los siguientes límites:
   a. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^2-5x}{3x+6x^2-2}\right)^{\frac{2x^2+\sqrt{x^2-4}}{x-2}}$
   b. $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-7}{3^{x+2}}$
   c. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-(x+1)}{x^2-4}$
   d. $\lim_{x\to\infty}\left(ln\frac{1+x^2}{1+x^3}\right)$ (2 puntos)

6. Calcula las asíntotas de la siguiente función. $\begin{cases} \frac{2x-1}{x+4} & si\, x \leq 0 \\ \frac{x^2+5}{x-3} & si\, x > 0 \end{cases}$ (2 puntos)

TEMA 7

(1) ① $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}\right)^{\frac{ax^3+1}{x^2-1}}=1$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}\right)^{\frac{ax^3+1}{x^2-1}}=[1^\infty]=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}-2x+1-\cancel{x^2}-x+2}{x^2+x-2}\right)\left(\frac{ax^3+1}{x^2-1}\right)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3x+3}{x^2+x-2}\right)\left(\frac{ax^3+1}{x^2-1}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-3ax^4-3x+3ax^3+3}{x^4-x^2+x^3-x-2x^2+2}}=e^{-3a}$$

$$e^{-3a}=1\Rightarrow e^{-3a}=e^0\Rightarrow -3a=0\Rightarrow a=0$$

(1,5) ② $f(x)=e^{-x}+2-x$

- f continua en $\mathbb{R}$, por ser suma de funciones continuas

$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua en } [0,3] \\ \left.\begin{array}{l} f(0)=2>0 \\ f(3)=\frac{1}{e^3}+2-3<0 \end{array}\right\} f(0)\cdot f(3)<0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{T. Bolzano}]{} \exists$ al menos $c\in(0,3)\ /\ f(c)=0$

(1,5) ③ $f(x)=x^3-x^2+x-2$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua en } [1,2] \text{ por ser polinómica} \\ \left.\begin{array}{l} f(1)=-1<0 \\ f(2)=4>0 \end{array}\right\} f(1)\cdot f(2)<0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{T. Bolzano}]{} \exists$ al menos $c\in(1,2)\ /\ f(c)=0$

(2) ④ $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{x+3} & \text{si } x<-2\\ x^2+2x+4 & \text{si } -2\le x<1\\ |x-7| & \text{si } x\ge 1\end{cases}=\begin{cases}\frac{4}{x+3} & \text{si } x<-2\\ x^2+2x+4 & \text{si } -2\le x<1\\ -x+7 & \text{si } 1\le x<7\\ x-7 & \text{si } x\ge 7\end{cases}$

$|x-7|=\begin{cases}x-7 & \text{si } x-7\ge0\Rightarrow x\ge7\\ -x+7 & \text{si } x-7<0\Rightarrow x<7\end{cases}$

Los trozos ②,③,④ son continuos por ser polinómicas

① $f_1(x)=\frac{4}{x+3}$ Dom f_1: $(-\infty,-2)\setminus\{-3\}$

Tiene una discontinuidad evitable en $x=-3$ porque $f(-3)$ no existe.

En $x=-2$

$f(-2)=4$

$\lim_{x\to-2^-}\frac{4}{x+3}=\frac{4}{1}=4$

$\|$

$\lim_{x\to-2^+}x^2+2x+4=4$

Continua en $x=-2$

En $x=1$

$f(1)=6$

$\lim_{x\to1^-}x^2+2x+4=7$

$\neq$

$\lim_{x\to1^+}-x+7=6$

Disc. inevitable de salto finito en $x=1$

En $x=7$

$f(7)=0$

$\lim_{x\to7^-}-x+7=0$

$\|$

$\lim_{x\to7^+}x-7=0$

Continua en $x=7$

(2) 5 a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^2-5x}{3x+6x^2-2}\right)^{\frac{2x^2+\sqrt{x^2-4}}{x-2}} = [1^\infty] = e^{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\cancel{6x^2}-5x-3x-\cancel{6x^2}+2}{3x+6x^2-2}\right]\left[\frac{2x^2+\sqrt{x^2-4}}{x-2}\right]} =$

$= e^{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-8x+2}{3x+6x^2-2}\right]\left[\frac{2x^2+\sqrt{x^2-4}}{x-2}\right]} = e^{-16/6} = e^{-8/3}$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-7}{3^{x+2}} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{3^x}{3^{x+2}} - \frac{7}{3^{x+2}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{3^2} - \frac{7}{3^{x+2}}\right] =$

$= \frac{1}{9} - 0 = \frac{1}{9}$

c) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-(x+1)}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2}\frac{\left[\sqrt{x^2+5}-(x+1)\right]\left[\sqrt{x^2+5}+(x+1)\right]}{(x^2-4)\left(\sqrt{x^2+5}+(x+1)\right)} =$

$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-x^2-2x-1}{(x^2-4)(\sqrt{x^2+5}+(x+1))} = \lim_{x\to 2}\frac{-2x+4}{(x^2-4)(\sqrt{x^2+5}+(x+1))} =$

$= \lim_{x\to 2}\frac{-2\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}\left[\sqrt{x^2+5}+(x+1)\right]} = \frac{-2}{4\cdot[3+3]} = \frac{-2}{24} = -\frac{1}{12}$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{1+x^2}{1+x^3}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{1+x^3}\right) = \ln 0 = -\infty$

(2) 6 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x+4} & \text{si } x \le 0 \\ \frac{x^2+5}{x-3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1 $\mathrm{Dom} f_1 : (-\infty, 0] \setminus \{-4\}$

AV $\lim_{x\to -4}\frac{2x-1}{x+4} = -\frac{9}{0} = \pm\infty \Rightarrow \boxed{x=-4}$

AH $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x-1}{x+4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-1}{-x+4} = 2 \quad \boxed{y=2}$

AO No tiene, porque hay AH

2 $\mathrm{Dom} f_2 : (0, +\infty) \setminus \{3\}$

AV $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+5}{x-3} = \frac{14}{0} = \pm\infty \Rightarrow \boxed{x=3}$

AH $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5}{x-3} = \infty$ No tiene

AO $m = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5}{x^2-3x} = 1$

$n = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+5}{x-3} - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+5-\cancel{x^2}+3x}{x-3} = 3 \quad \boxed{y = x+3}$