Números imaginarios. Forma binómica. Representación gráfica

1 Representa gráficamente estos números complejos e indica cuáles son imaginarios puros y cuáles reales.

$$3-4i,\ -7i,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{-3},\ -1-i,\ -1+i,\ \frac{1}{4}-\frac{5}{2}i,\ 3$$

2 Escribe los conjugados y los opuestos de:

$$3-i,\ \ 2+4i,\ -5i,\ 1/2-1/3i$$

3 Representa gráficamente el conjugado y el opuesto de los siguientes números complejos.

a) $z=-4+3i$ *d)* $z=-1-2i$

b) $z=-7i$ *e)* $z=3-4i$

c) $z=4$ *f)* $z=0$

4 ¿Qué tienen en común los números complejos de afijos $(4,0), (-4,0), (0,4)$ y $(0,-4)$? ¿Por qué?

5 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2+36=0$ *c)* $x^3-27=0$

b) $x^2-36=0$ *d)* $x^2-4x+5=0$

¿A qué conjunto numérico pertenecen las soluciones?

Solución: *a)* $x=\pm 6i$ *b)* $x=\pm 6$ *c)* $x=3, x=-3/2\pm 3\sqrt{3}/2i$ *d)* $x=2\pm i$

6 Resuelve la ecuación $x^2-2x+10=0$ y comprueba que las raíces obtenidas la verifican.

Solución: $x=1\pm 3i$

7 Determina las soluciones, en el conjunto de los números complejos, de las siguientes ecuaciones.

a) $x^2+1=0$ *c)* $x^2-4x+29=0$

b) $x^4+81=0$ *d)* $x^3-5x^2+4x-20=0$

Solución: *a)* $x_1=i, x_2=-i$ *b)* $x_1=3i, x_2=-3i, x_3=3, x_4=-3$ *c)* $x_1=2+5i, x_2=2-5i$ *d)* $x_1=5, x_2=-2i$ y $x_3=2i$

Operaciones con números complejos en forma binómica

8 Efectúa las siguientes sumas en forma binómica.

a) $(-2+3i)+(7-4i)$

b) $\left(\frac{1}{2}-3i\right)+\left(\frac{3}{2}-i\right)$

c) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}i\right)+\left(\sqrt{2}-5\sqrt{5}i\right)$

9 Calcula los siguientes productos.

a) $(2+3i)\cdot(3-5i)$ *c)* $\left(\sqrt{3}+i\right)\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)$

b) $\left(\frac{1}{2}-i\right)\cdot\left(\frac{3}{4}+2i\right)$ *d)* $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^2$

Solución: *a)* $21-i$ *b)* $19/8+1/4i$ *c)* 4 *d)* $4i$

10 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $(3-2i)\cdot(3+i)-(1-2i)\cdot(4+2i)$

b) $\frac{4-2i}{2+3i}+(2-2i)$

Solución: *a)* $3+3i$ *b)* $28/13-42/13i$

11 Realiza las siguientes operaciones.

a) $[(3-2i)\cdot(3+i)-(1-2i)\cdot(1+2i)]\,(5+4i)$

b) $\frac{2}{3-i}$

c) $\frac{\sqrt{2}+i}{-i}$

d) $\frac{1+\sqrt{5}i}{i}$

Solución: *a)* $42+9i$ *b)* $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$ *c)* $-1+\sqrt{2}i$ *d)* $\sqrt{5}-$

12 Demuestra que es $\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$ el inverso de $a+bi$.

13 Calcula: $z=\frac{3}{i}+\frac{2i}{2+i}+\frac{2+3i}{1+2i}$

Solución: $z=(10-12i)/5$

14 Dados los números complejos $3-bi$ y $a+2i$, calcula la a y b para que su producto sea $7+4i$.

Solución: $a=1, b=2; a=4/3, b=3/2$

15 Calcula.

a) $\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$ *b)* $\frac{(2+i)\cdot(1-2i)^2}{2-i}$

Solución: *a)* -1 *b)* $\frac{7}{5}-\frac{24}{5}$

16 Calcula.

a) i^{33} *b)* i^{185} *c)* i^{186} *d)* i^{64} *e)* $1/i^5$ *f)* i^{-2}

17 Determina el valor de m para que el cociente $\frac{6+mi}{1-i}$ sea igual a $1+5i$.

Solución: $m=4$

18 Determina el valor de a para que $(a-5i)^2$ sea un número imaginario puro.

Solución: $a=5; a=-5$

19 Halla b para que el producto $(3+bi)(3-5i)$ sea:

a) Un número real.

b) Un número imaginario puro.

Solución: *a)* $b=5$ *b)* $b=-9/5$

20 Halla el valor de k para que el número $\left(\frac{4-ki}{3+i}\right)\cdot i^{5}$ sea imaginario puro.

Solución: $k=-4/3$

21 Calcula el valor de x para que el complejo $\frac{3-2xi}{4+3i}$:

a) Sea imaginario puro.

b) Sea un número real.

c) Tenga su afijo en la bisectriz del primer cuadrante.

Solución: *a)* $x=2$ *b)* $x=-9/8$ *c)* $x=-21/2$

22 Calcula el cociente $\frac{x+i}{2+i}$ y determina el valor de x para que el módulo del complejo resultante sea $\sqrt{2}$.

Solución: $x=\pm 3$

23 El número $\dfrac{2-(1+x)\,i}{1-xi}$ es real. Calcula x y obtén el número.

Solución: $x = 1, n = 2$

24 Calcula el número real a para que el número complejo $z = \dfrac{3-2ai}{4-3i}$ esté situado en la bisectriz del primer cuadrante.

Solución: $-3/14$

Forma polar de un número complejo

25 ¿El producto de dos números complejos es real?

a) Si son conjugados, sí.

b) Si son opuestos, sí.

c) El producto de dos números complejos nunca puede ser un número real.

Indica y razona la respuesta correcta.

26 Si dos números complejos tienen el mismo afijo:

a) Tienen el mismo argumento.

b) Tienen módulos proporcionales.

c) Su cociente tiene como módulo 1.

Indica y razona la afirmación correcta.

27 ¿Qué tipo de gráfica forman los afijos de los números complejos que tienen el mismo argumento?

28 ¿Se puede decir que un número complejo es real si su argumento es π?

29 Si $z = m_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números complejos $m_{\alpha+180°}$ y $m_{-\alpha}$?

30 ¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su conjugado? ¿Y con el de su opuesto?

31 Calcula el módulo y el argumento de los siguientes números complejos, representándolos previamente:

a) $2-2i$ *c)* $2i$ *e)* $-2i$ *g)* $-2+2i$

b) $2+2i$ *d)* $-2-2i$ *f)* 2 *h)* -2

Solución: *a)* $m = 2\sqrt{2}; \alpha = 315°$ *b)* $m = 2\sqrt{2}; \alpha = 45°$ *c)* $m = 2; \alpha = 90°$ *d)* $m = 2\sqrt{2}; \alpha = 225°$ *e)* $m = 2; \alpha = 270°$ *f)* $m = 2; \alpha = 0°$ *g)* $m = 2\sqrt{2}; \alpha = 135°$ *h)* $m = 2; \alpha = 180°$

32 Expresa en forma polar y trigonométrica los siguientes complejos.

a) $-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$ *c)* $4-4\sqrt{3}i$

b) $4i$ *d)* $3+3i$

Solución: *a)* $4_{5\pi/4} = 4\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{4}\right)$

b) $4_{\pi/2} = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $8_{5\pi/3} = 8\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{3}\right)$

d) $\left(3\sqrt{2}\right)_{\pi/4} = 3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$

33 Expresa en forma binómica estos complejos.

a) $3_{\frac{3\pi}{4}}$ *b)* $1_{\frac{\pi}{6}}$ *c)* 2_{π} *d)* $8_{\frac{4\pi}{3}}$ *e)* $3_{\frac{\pi}{4}}$

Solución: *a)* $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$ *b)* $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ *c)* -2 *d)* $-4-4\sqrt{3}i$ *e)* $\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$

34 Expresa en forma binómica los siguientes números complejos.

a) $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{3}\right)$

b) $3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$

c) $3\,(\cos 3 + i\,\text{sen}\,3)$

Solución: *a)* $1-\sqrt{3}i$ *b)* $-3+3i$ *c)* $-2{,}97+0{,}42i$

35 Representa gráficamente estos números complejos.

a) $3-2i$ *e)* $4_{45°}$

b) $4+2i$ *f)* $3_{270°}$

c) $-1-3i$ *g)* $2\,(\cos 150° + i\,\text{sen}\,150°)$

d) $-4-i$ *h)* $2\,(\cos 45° - i\,\text{sen}\,45°)$

36 Calcula el conjugado, el opuesto y el inverso de los números complejos del ejercicio anterior.

37 Calcula el valor de m para que el número complejo $m+4i$ tenga el mismo módulo que $\dfrac{5}{\sqrt{2}} - \dfrac{5\sqrt{2}}{2}i$.

Operaciones con números complejos en forma polar

38 Resuelve los siguientes productos.

a) $(3)_{\frac{3\pi}{4}} \cdot (2)_{\frac{\pi}{6}}$ *d)* $(4)_{\frac{\pi}{12}} \cdot (2)_{\frac{5\pi}{18}} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)_{\pi}$

b) $(\sqrt{2})_{\frac{\pi}{3}} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{\frac{5\pi}{3}}$ *e)* $(2+2i) \cdot (\sqrt{2})_{\frac{\pi}{3}}$

c) $-3 \cdot 5_{45°}$ *f)* $6 \cdot 2_{15°}$

39 Calcula los siguientes cocientes.

a) $\dfrac{10_{\frac{\pi}{3}}}{2_{\frac{\pi}{3}}}$ *b)* $\dfrac{2_{\pi}}{-2}$ *c)* $\dfrac{6_{30°}}{2_{50°}}$ *d)* $\dfrac{12_{30°}}{i}$

40 Calcula.

a) $(3-2i)^4$ *c)* $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^2$

b) $\left(\sqrt{3}-i\right)^5$ *d)* $(2+i)^3$

41 Calcula.

a) $(1-2i)^{52}$ *c)* $\sqrt[4]{-81i}$

b) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{12}$ *d)* $\sqrt[5]{3\sqrt{3}+\sqrt{3}i}$

42 Calcula el módulo y el argumento de:

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3 \cdot \left(\sqrt{3}+i\right)^4 \cdot \left(\sqrt{3}-i\right) + i^{31}$$

Solución: $m = 255; \alpha = 90°$

43 Resuelve las siguientes potencias.

a) $\left[\left(\sqrt{3}\right)_{\frac{\pi}{3}}\right]^4$ *b)* $\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)^3$ *c)* $\left(1_{\frac{3\pi}{2}}\right)^{50}$

44 Representa gráficamente las seis primeras potencias del número $z = 2 - 2i$.

45 Calcula las siguientes raíces.

a) $\sqrt{3_{(\pi/3)}}$ *c)* $\sqrt{2-2i}$ *e)* $\sqrt[3]{8i}$

b) $\sqrt{-i}$ *d)* $\sqrt[4]{-625}$ *f)* $\sqrt[5]{243_{60°}}$

46 Calcula.

a) $\sqrt[5]{1+\sqrt{3}i}$ *c)* $\dfrac{\sqrt[3]{-1+i}}{\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}}$

b) $(1-i)^{5/4}$ *d)* $\sqrt{\sqrt{3+3\sqrt{3}i}}$

Solución: *a)* $\sqrt[5]{2}_{12°}, \sqrt[5]{2}_{84°}, \sqrt[5]{2}_{156°}, \sqrt[5]{2}_{228°}, \sqrt[5]{2}_{300°}$
b) $\sqrt[8]{32}_{33,75°}, \sqrt[8]{32}_{123,75°}, \sqrt[8]{32}_{213,75°}, \sqrt[8]{32}_{303,75°}$
c) $\sqrt[3]{1/2}_{15°}, \sqrt[3]{1/2}_{75°}, \sqrt[3]{1/2}_{135°}, \sqrt[3]{1/2}_{195°}, \sqrt[3]{1/2}_{255°}, \sqrt[3]{1/2}_{315°}$
d) $\sqrt[4]{6}_{15°}, \sqrt[4]{6}_{105°}, \sqrt[4]{6}_{195°}, \sqrt[4]{6}_{285°}$

47 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $z^4 + 81 = 0$ *d)* $(z+1)^2 + 25 = 0$

b) $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$ *e)* $z^2 + (3-i) + (2-2i) = 0$

c) $z^6 + 32z = 0$ *f)* $z^3 + z^2 + 15z - 17 = 0$

Solución: *a)* $3_{45°}, 3_{135°}, 3_{225°}, 3_{315°}$ *b)* $i, -i$ (ambas dobles)
c) $2_{36°}, 2_{108°}, 2_{180°}, 2_{252°}, 2_{324°}$ *d)* $-1+5i, -1-5i$
e) $0{,}64 + 2{,}33i, -0{,}64 - 2{,}33i$ *f)* $1, -1+4i, -1-4i$

Problemas de aplicación

48 Calcula el inverso de estos números complejos.

a) $5_{\pi/4}$ *b)* $6i$ *c)* $2-2i$

¿Qué relación hay entre los módulos de un número complejo y los de su inverso? ¿Y entre los argumentos?

49 Halla los complejos que cumplan que el cuadrado del inverso del opuesto dividido entre $(1/8)_{30°}$ dé $2i$.

Solución: $2_{60° + 180° \cdot k}, k \in \mathbb{Z}$

50 Determina dos números complejos z_1 y z_2 sabiendo que su cociente es 3, que la suma de sus argumentos es $\pi/3$ y que la suma de sus módulos es 4.

Solución: $3_{30°}, 1_{30°}$

51 Calcula dos complejos cuyo cociente es 4, sus argumentos suman 40° y la suma de sus módulos es 14.

Solución: $(56/5)_{20°}, (14/5)_{20°}$

52 Calcula dos números complejos tales que su producto sea $8i$ y uno de ellos sea el cuadrado del otro.

Solución: $4_{\pi/3}, 2_{\pi/6}$

53 El producto de dos números complejos es $3i$, y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es 1/3. Calcúlalos.

Solución: $1_{\pi/8}, 3_{3\pi/8}$

54 Dos números complejos tienen el mismo módulo, sus argumentos suman 50° y uno de ellos es el conjugado del cuadrado del otro. Calcúlalos.

Solución: $1_{100°}, 1_{310°}$

55 Determina los números complejos que cumplan que el cubo de su conjugado coincida con su opuesto.

Solución: $1_{225° + k \cdot 360°}, k \in \mathbb{Z}$

56 Calcula todos los números complejos que cumplan que el cuadrado de su inverso sea el opuesto de su conjugado.

Solución: $1_{180° + k \cdot 360°}, k \in \mathbb{Z}$

57 Una de las raíces cúbicas de un número complejo es $8i$. Calcula dicho número y las otras raíces.

Solución: El número es $-512i$ y las otras raíces son $8_{210°}$ y 8

58 Encuentra el número complejo que sumado a $\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^3$ da como resultado 4 (cos 315° + i sen 315°). Expresa la solución en forma polar, binómica y trigonométrica.

Solución: $\left(4\sqrt{5}\right)_{251,57°}, -2\sqrt{2} - 6\sqrt{2}i, 4\sqrt{5}(\cos 251{,}57° + i \operatorname{sen} 251{,}57°)$

59 Dados tres números complejos, z_1, z_2 y z_3, sabemos que z_2 es el conjugado de z_1 y que z_3 es el conjugado del opuesto de z_2. ¿Cómo son entre ellos z_1 y z_3?

60 Calcula sen 4α y cos 4α utilizando la fórmula de De Moivre.

61 Comprueba las fórmulas del seno y el coseno del ángulo doble demostradas en la UNIDAD 4 empleando la fórmula de De Moivre.

62 Tenemos un triángulo de vértices $A(1, 1)$, $B(2, -1)$ y $C(-3, 2)$, y lo giramos un ángulo de 30° con centro el origen de coordenadas. Calcula los vértices del triángulo girado.

Solución: $A' = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right), B' = \left(\frac{2\sqrt{3}+1}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right),$
$C' = \left(\frac{-3\sqrt{3}-2}{2}, \frac{2\sqrt{3}-3}{2}\right)$

63 Los afijos de los puntos z_1 y z_2 forman un triángulo equilátero con el origen de coordenadas. Calcula z_2, sabiendo que $z_1 = 4 + 5i$.

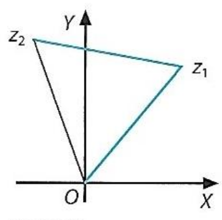

FIGURA 5.26.

Solución: $-2{,}33 + 5{,}96i$

64 Un hexágono regular centrado en el origen tiene un vértice en el punto (3, 3). Calcula los otros vértices.

Solución: $(-1{,}1; 4{,}1), (-4{,}1; 1{,}1), (-3, -3), (1{,}1; -4{,}1), (4{,}1; -1{,}1)$

65 Considera las siguientes aplicaciones en el plano:

α: giro de centro el origen y de amplitud 30°.

β: simetría respecto del origen de coordenadas.

γ: simetría respecto del eje de abscisas.

δ: giro de centro el origen y de amplitud 60°.

Halla las coordenadas del punto que se obtienen al aplicar sucesivamente α, β, γ, δ, al punto (2,3).

Solución: $(-3{,}23; 1{,}59)$

8.1. Halla el módulo y el argumento de los números complejos:

a) $-1+\dfrac{\sqrt{3}i}{2}$, b) $(\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i)^2$.

8.2. Efectúa las operaciones siguientes:

a) $\left(\dfrac{-i}{1+3i}\right)^2$, b) $|2+3i|\cdot|3-2i|$, c) $\dfrac{-1+2i}{-2i(1+2i)}$.

8.3. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $z^2-3z+4=0$, $z^4+z^3-z^2+z-2=0$.

8.4. Escribe en forma polar los números complejos:

a) $4(\cos 330^\circ + i\operatorname{sen} 330^\circ)$. d) $1+i$.

b) $19(\cos 190^\circ + i\operatorname{sen} 190^\circ)$. e) $4-4i$.

c) $\sqrt{5}(\cos 17^\circ 20' + i\operatorname{sen} 17^\circ 20')$. f) $1-\sqrt{3}i$.

8.5. Efectúa los productos siguientes:

a) $(1-\sqrt{3}i)(-2-2i)(-3+\sqrt{3}i)$.

b) $(4\sqrt{2}+\sqrt{32}i)(-1+i)(-6+\sqrt{12}i)$.

8.6. El punto $(-2,8)$, ¿en qué punto se transforma al girarlo 135º en torno al origen? ¿Y al girarlo −120º?

8.7. Un triángulo equilátero tiene un vértice en el origen de coordenada, y otro en el punto $(-1,-5)$. ¿Cuáles son las coordenadas del otro vértice?

8.8. Un pentágono regular tiene su centro en el origen de coordenadas y uno de sus vértices está en $(0,4)$. Determina los vértices del pentágono que se forma uniendo los puntos medios consecutivos de los lados.

8.9. Calcula los cocientes:

a) $\dfrac{1+i}{1-i}$. b) $\dfrac{-i}{2-\sqrt{12}i}$.

c) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}i}{1+i}$. d) $\dfrac{(-2+2\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}-i)}{-4i}$.

8.10. Halla la forma trigonométrica de los números complejos:

$$z_1 = 2-\sqrt{2}i, \quad z_2 = 3+3i,$$

y efectúa las divisiones $\dfrac{z_1}{z_2}$ y $\dfrac{z_2}{z_1}$.

8.11. Calcula por el binomio de Newton y por la fórmula de De Moivre $(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^3$ y deduce de ello las fórmulas de $\cos 3\alpha$ y de $\operatorname{sen} 3\alpha$.

8.12. Calcula:

a) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^6$, b) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{3} - i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{4+3i}$.

8.13. Escribe en forma trigonométrica el número:

$$z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i,$$

y calcula z^5, expresándolo en forma binómica.

8.14. Halla las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{\left(\cos\dfrac{3\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right)}$.

b) $\sqrt{4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}\right)}$.

c) $\sqrt[5]{32\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{4}\right)}$.

d) $\sqrt[4]{4\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{3}\right)}$.

Escribe el resultado en forma trigonométrica.

8.15. Calcula:

a) $\sqrt{-1-\sqrt{3}i}$. b) $\sqrt{2+2\sqrt{3}i}$.

c) $\sqrt[4]{16}$. d) $\sqrt[3]{i}$.

e) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$. f) $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$.

8.16. Una de las raíces cúbicas de un número complejo es $\sqrt{3}-i$, determina las otras dos raíces y el número complejo.

8.17. Sabiendo que $2i$ es una raíz sexta de -64, hállense todas las restantes.

8.18. Resuelve y representa las raíces de las ecuaciones:

a) $z^4-1=0$. b) $z^3+1=0$.

c) $z^6-1=0$. d) $z^3-27=0$.

8.19. Resuelve las ecuaciones:

a) $z^2-2i=0$. b) $z^2-(3+i)z+4=0$.

c) $z^2+25-2(z-5i)=0$. d) $z^5-32=0$.

8.20. Halla las soluciones complejas del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 64z^6 - 64w^6 = 63 \\ 8z^3 - 8w^3 = 7 \end{cases}$$