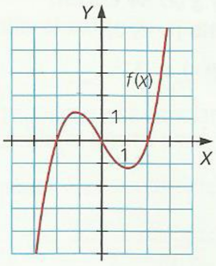
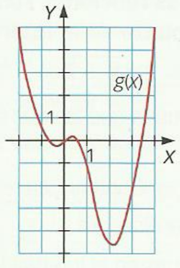
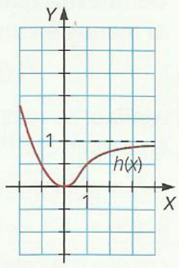
Límites de funciones

44. A partir de las gráficas de las siguientes funciones, determina los límites indicados.







a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ c) $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ e) $\lim_{x\to+\infty} h(x)$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ d) $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ f) $\lim_{x\to-\infty} h(x)$

45. Halla estos límites de funciones.

a) $\lim_{x\to+\infty} x^5$ $+\infty$ e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4}$ 0 i) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 0

b) $\lim_{x\to-\infty} x^5$ $-\infty$ f) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^4}$ 0 j) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $+\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2}$ $+\infty$ g) $\lim_{x\to+\infty} 5^x$ $+\infty$ k) $\lim_{x\to+\infty} 4^{x^2}$ $+\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2}$ $+\infty$ h) $\lim_{x\to-\infty} 5^x$ 0 l) $\lim_{x\to-\infty} 4^{x^2}$ $+\infty$

46. Calcula los siguientes límites de funciones.

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x-3}$ $+\infty$ g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}$ 1

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-3}$ $-\infty$ h) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}$ 1

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{3x^2}$ $\frac{1}{3}$ i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+3}{-x^3-3x^2-5}$ 0

d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{3x^2}$ $1/3$ j) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+3}{-x^3-3x^2-5}$ 0

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1}$ $-\infty$ k) $\lim_{x\to+\infty} \frac{16}{x-2}$ 0

f) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1}$ $-\infty$ l) $\lim_{x\to-\infty} \frac{16}{x-2}$ 0

47. Calcula $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ para:

a) $f(x) = \frac{4x+3}{2x^2+1}$ b) $f(x) = \frac{4x^2+3}{2x^2+1}$ c) $f(x) = \frac{4x^3+3}{2x^2+1}$

48. Calcula $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2-x+2}}{\frac{1}{2}}$. 2

49. Calcula el valor de estos límites de funciones exponenciales.

a) $\lim_{x\to+\infty} (0{,}7)^{3x+2}$ 0 c) $\lim_{x\to+\infty} (3x-7)^{2-x}$ 0

b) $\lim_{x\to+\infty} (2x - 0{,}01x^2)$ $-\infty$ d) $\lim_{x\to+\infty} ((x-2)^2 - x^2)$ $-\infty$

50. Resuelve los siguientes límites con radicales.

a) $\lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2-6x})$ 3 c) $\lim_{x\to+\infty} (x^2 - \sqrt{x^2-6x})$ $+\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} (x - \sqrt{x^2-6x})$ 3 d) $\lim_{x\to-\infty} (x^2 - \sqrt{x^2-6x})$ $+\infty$

51. Halla el valor de los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^4+2x^2} - x^2)$ 1 c) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+3x} - x^2)$ $-\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^4+2x^2} - x^2)$ 1 d) $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+3x} - x^2)$ $-\infty$

52. Resuelve estos límites.

a) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{x-1}$ e^3 c) $\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{1-x}$ e^{-3}

b) $\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{3}{x}\right)^{x-1}$ e^{-3} d) $\lim_{x\to-\infty} \left(1-\frac{3}{x}\right)^{1-x}$ e^3

53. Determina el valor del siguiente límite.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2+x}}{2}$$ -1

54. Halla el límite cuando x tiende a $+\infty$ de estas funciones con radicales.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x^4+2x^3-5} - \sqrt{x^4-3x}}{x+4}$ 1

b) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}}$ 2

55. Calcula: $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^4+3x^2-2} - x^2 + 3)$ $9/2$

56. Resuelve: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$ 2

57. Halla el valor de $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3+1}{x^2-3x} - \frac{x^2+2x}{x-3}\right)$. -2

58. Determina el valor del siguiente límite.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x+\sqrt{2x}} - \sqrt{2x}\right)$$ $1/2$

59. Halla el valor de m tal que: $m=5$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x-8} - \sqrt{x^2+mx+7}\right) = -1$$

60. Determina el valor de m para que se cumpla la igualdad.

a) $\lim_{x\to+\infty} (2x^2 - \sqrt{4x^4+mx^2-5}) = 2$ $m=-8$

b) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{9x^2+4x} - 3x + m) = \frac{1}{2}$ $m=-1/6$

61. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3+2x}{1+2x}\right)^{x-6}$ e d) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1+4x}{4x+7}\right)^{\frac{x^3+1}{x}}$ 0

b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x}\right)^{\frac{x}{2}}$ e^{-3} e) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2+6}{6x+3x^2}\right)^{-\frac{x}{4}}$ $e^{1/2}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3-3x}{1+2x^3}\right)^{\frac{x^2-3}{3}}$ $e^{-1/2}$ f) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4x^4-2}{(2x^2-1)^2+1}\right)^{\frac{x^3-3x}{x+2}}$ e

62. Calcula el valor de m para que se cumpla la igualdad.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{mx+2x^2}\right)^{x+2}=\dfrac{1}{e}$ $m=2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x+3}{2+5x}\right)^{\frac{x^2-2}{8+mx}}=\dfrac{7}{10}$ $m=\dfrac{1}{5\ln\left(\frac{7}{10}\right)}$

63. Halla el resultado de estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x+10}{3^{x+1}}$ $\dfrac{1}{3}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{x+1}}{3^x+10}$ 3

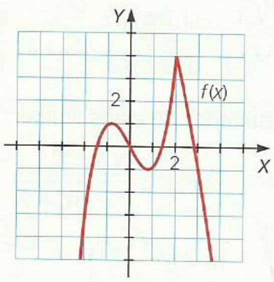
64. Expresa las siguientes funciones como funciones definidas a trozos y, después, halla sus límites cuando x tiende a $-\infty$ y a $+\infty$.

a) $f(x)=|x+2|-|x-2|$ c) $f(x)=\left|\dfrac{2x+3}{x-2}\right|$

b) $f(x)=x-|3-2x|$ d) $f(x)=\left|\dfrac{x-3}{1-x}\right|$

Límite de una función en un punto

65. La siguiente representación es la gráfica de la función $f(x)$.

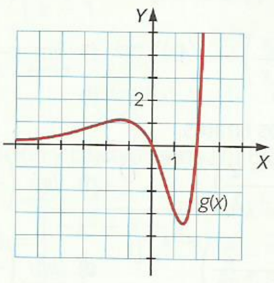


Da un valor aproximado a estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to3}f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

66. Esta es la gráfica de la función $g(x)$.



Da un valor aproximado de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to-3}g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to1}g(x)$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to0}g(x)$ d) $\lim\limits_{x\to2}g(x)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$

67. Calcula estos límites si $f(x)=2^{\ln x}$ y $g(x)=3^{\ln(x-1)}$.

a) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}}f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to e+1}g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to e}f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to2}g(x)$ f) $\lim\limits_{x\to\frac{e+1}{e}}g(x)$

68. Considera la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}}$ y calcula:

a) $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ 5 b) $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$ -3 c) $\lim\limits_{x\to3}f(x)$ $\dfrac{7}{\sqrt{6}}$

69. Si $f(x)=\log_2(x-3)+1$, resuelve estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to4}f(x)$ 1 c) $\lim\limits_{x\to\frac{7}{2}}f(x)$ 0

b) $\lim\limits_{x\to11}f(x)$ 4 d) $\lim\limits_{x\to\frac{13}{4}}f(x)$ -1

70. Halla estos límites sabiendo que $g(x)=\dfrac{1}{x-2}+\log_{\frac{1}{2}}x$.

a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}g(x)$ b) $\lim\limits_{x\to8}g(x)$

71. Si tenemos la función $f(x)=\dfrac{6x-12}{x^2-3x-4}$, ¿cuáles serán sus límites cuando x tienda a 0, -1, 1 y 4?

72. Si sabemos que $\lim\limits_{x\to5}m(x)=4$, $\lim\limits_{x\to5}n(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to5}p(x)=+\infty$, calcula, si es posible, el límite cuando x tiende a 5 de las funciones.

a) $m(x)+n(x)+p(x)$ e) $\dfrac{m(x)}{n(x)}$ i) $(m(x))^{n(x)}$

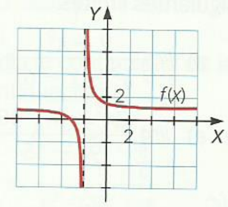
b) $m(x)\cdot n(x)-p(x)$ f) $n(x)\cdot p(x)$ j) $(m(x))^{p(x)}$

c) $m(x)\cdot p(x)$ g) $\dfrac{p(x)}{m(x)}$ k) $(n(x))^{p(x)}$

d) $\dfrac{n(x)}{m(x)}$ h) $\dfrac{n(x)}{p(x)}$ l) $(p(x))^{n(x)}$

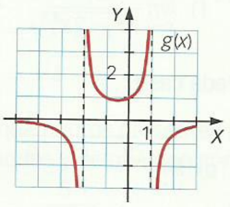
73. Observa la gráfica y determina los siguientes límites.

a)



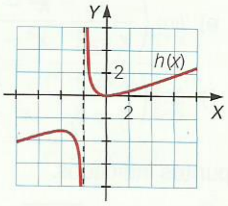
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)$ $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

b)



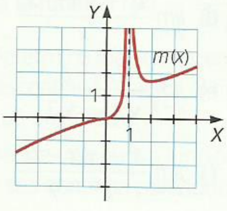
$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ $\lim\limits_{x\to-2^-}g(x)$ $\lim\limits_{x\to-2^+}g(x)$ $\lim\limits_{x\to1^-}g(x)$ $\lim\limits_{x\to1^+}g(x)$

c)



$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)$ $\lim\limits_{x\to-2^+}h(x)$ $\lim\limits_{x\to-2^-}h(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$

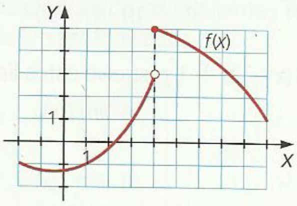
d)



$\lim\limits_{x\to-\infty}m(x)$ $\lim\limits_{x\to1^+}m(x)$ $\lim\limits_{x\to1^-}m(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}m(x)$

ACTIVIDADES

74. Observa la gráfica de la función $f(x)$, y calcula los límites que se indican.



a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$

75. Resuelve estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$ −1 e) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$ −1

b) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$ −∞ f) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$ ∞

c) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 9}$ −∞ g) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 9}$ ∞

d) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$ −∞ h) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$ ∞

76. Calcula los límites de estas funciones racionales.

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$ ∄ c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{(x - 3)^2}$ ∄

b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x - 1}{4x^2 - 4x + 1}$ ∄ d) $\lim\limits_{x \to \frac{5}{3}} \dfrac{3x^2 + x - 10}{9x^2 - 30x + 25}$ ∄

77. Determina el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$ 1/2 d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{9 - x^2}{x^2 - x - 6}$ −6/5

b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x - 1}{x - 2x^2}$ −2 e) $\lim\limits_{x \to \frac{5}{3}} \dfrac{3x^2 + x - 10}{9x - 15}$ 11/9

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$ 1/5 f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^3}{x^3 - 2x^4}$ 5

78. Opera y halla el límite en cada caso.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$ −2 d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{2 + x} - \dfrac{1}{2}}{x}$ −1/4

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x - 1)^2 - 1}{x^2}$ ∄ e) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x - 2} \cdot \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 3} \right)$ 4/5

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x - 3x^2}{3x + x^2}$ 4/3 f) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{x - 1}{x - 3} - \dfrac{x + 5}{x^2 - 4x + 3} \right)$ ∄

79. Calcula cada límite en los puntos indicados.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{3x - 3}$ 1/6 d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}$ 1/4

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2}$ 4 e) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x - 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$ 4√3

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$ 0 f) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1 - \sqrt{x - 2}}{x^2 - 9}$ −1/12

80. Determina el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{\sqrt{2x + 1} - 3}$ 24 e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}{x}$ −1

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x + 5}{8x - \sqrt{9x^2 + 1}}$ f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{2x + 5} - 3}$ 3/4

c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 16}$ −1/16 g) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{13 - 4x} - \sqrt{28 + x}}{\sqrt{x + 3}}$ 0

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 - x^2}{\sqrt{x + 1}}$ 0 h) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x - 2}} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} \right)$ 1

81. Considera la función y resuelve los límites.

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 11x + 6}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$$

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 1/3 c) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ ∄ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 2

b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ −3 d) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ 1 f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 2

82. Calcula el valor de los siguientes límites, sabiendo que:

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^2 + 3} - 2x^2}$$

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ 4/7 c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 0 e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ −∞

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ −4/7 d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ $\dfrac{-2\sqrt{7}+6}{19}$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ∞

83. Obtén los resultados de estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ 0 c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}}$ 0 e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ 1/4

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ ∄ d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ $-\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$ f) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$ 6

84. Determina el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(2 + \dfrac{1}{x^4} \right)$ +∞ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4x - 2}{4x - 3} \right)^{4x^2 - 1}$ +∞

b) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x + 2}{x - 1} \right)^{x - 3}$ 1/4 e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4x + 3}{3x} \right)^{3x}$ +∞

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + x}{1 - x} \right)^{x^2}$ 1 f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x}{x + 5} \right)^{x}$ e^{-5}

85. Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x - 2}{x + 2} \right)^{-x^2 + 3}$ 0 d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x - 3}{3 + 2x} \right)^{\frac{2x^2 - 1}{1 + 3x}}$ e^{-2}

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 3x} \right)^{x^2 + 4}$ 0 e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x + x^2}{x^2 - 6x - 2} \right)^{\frac{1 - x^3}{x^2}}$ e^{8}

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^2 + 1}{3x^2 - 1} \right)^{\frac{x^2 + 1}{x}}$ 1 f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[x]{\dfrac{7x^2 + 1}{2 + 7x^2}} \right)^{x^2 + 3}$ 1

86. Resuelve.

a) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ 1 b) $\lim\limits_{x \to 0} (2x + 1)^{\frac{1}{x}}$ e^{2}

87. Sabiendo que $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - ax + 3}{x - 3}$ es un límite finito, determina el valor de a y obtén el límite.

a=4 lim=2

88. Considerando la siguiente función, determina el valor de a sabiendo que dicha función tiende a 5 cuando x tiende a -2.

$$f(x) = \frac{x^2 - ax + 3}{x^2 + 1}$$ $a = 9$

89. Determina el valor de m para que se cumplan las siguientes igualdades.

$m = -7$ $m = 4$

a) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{1 + 2x}{x + 4} \right)^{\frac{m}{3-x}} = e$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2 - 2}{3x - 4} \right)^{\frac{m}{x-2}} = e^2$

90. Halla el valor de m para que se cumpla:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - ax} - \sqrt{x^2 + 2} \right) = 3$$ $a = -6$

91. Calcula m para que el límite sea finito.

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{mx + 6}}{x - 2}$$ $m = -1$

Para el valor obtenido, halla el valor del límite. $\lim = \frac{1}{2}$

92. Sabiendo que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{sen\ x} = 1$, halla:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\ x}{x}$ 1 c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ $1/2$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2}$ 1 d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$ 0

93. Calcula los siguientes límites, considerando la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \sqrt{x + 1} & \text{si } -1 < x < 3 \\ 3x - 7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ -3 c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 1 e) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ 0 d) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ $\sqrt{2}$ f) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

94. A partir de la siguiente función, halla los límites indicados.

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -3x + 2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{-2x}{x - 1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 1 c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ $3/2$ e) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ -4

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 2 d) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ -1 f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ -2

95. Considera la función y calcula estos límites.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{-x^2 + x + 2} & \text{si } x \neq 2 \\ -\dfrac{4}{3} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ -1 c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ -2 e) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ $-5/4$

b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ $\nexists$ d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ $-4/3$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ -1

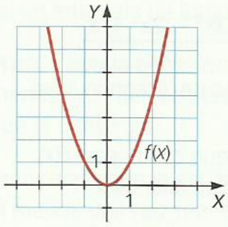
96. Dibuja la gráfica aproximada de una función que cumpla simultáneamente las condiciones que se indican a continuación.

- $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

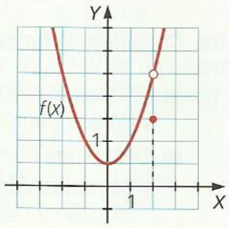
Continuidad de una función

97. Decide si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican. En caso de no serlo, determina el tipo de discontinuidad existente.

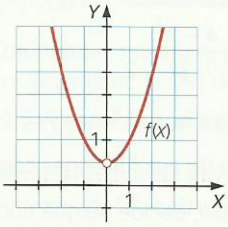
a) En $x = 0$ y $x = 2$.



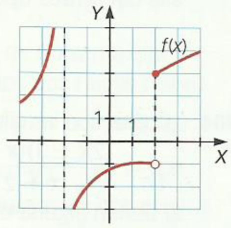
d) En $x = -1$ y $x = 2$.



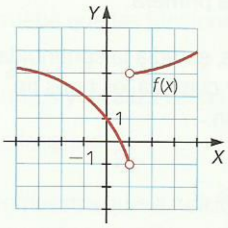
b) En $x = 0$ y $x = 2$.



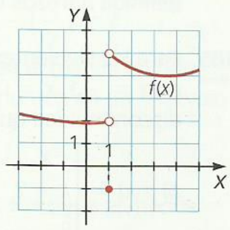
e) En $x = -2$ y $x = 2$.



c) En $x = 1$.



f) En $x = 1$.



98. Estudia la continuidad de las funciones que aparecen a continuación.

a) $y = x^2 - 5x + 6$ e) $y = \ln|x|$

b) $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ f) $y = \log(2 - x)$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ g) $y = 2|x - 1|$

d) $y = \sqrt{4 - x^2}$ h) $y = |x - 3| + |x + 3|$

99. ¿En qué puntos presentan una discontinuidad estas funciones y de qué tipo son?

a) $y = \dfrac{5}{x - 2}$ d) $y = \dfrac{2x + 2}{x^2 - 2x - 3}$

b) $y = \dfrac{6x}{x^2 - 2x + 3}$ e) $y = \dfrac{x^2 - x}{2x^2 + 4x - 6}$

c) $y = \dfrac{3x - 6}{x^2 - 2x + 1}$ f) $y = \dfrac{2x^2 + 4x + 6}{x^2 - x}$

100. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{2 - x}$:

a) Determina los puntos en los que la función $f(x)$ es discontinua e indica el tipo de discontinuidad que presenta.

b) Define una nueva función que contenga a $f(x)$ y sea continua para todos los valores de x.

101. Considera la función $f(x) = \dfrac{18 - 6\sqrt{x+5}}{x-4}$ $[-5,4) \cup (4,+\infty$

a) ¿Para qué valor de x la función no es continua? Indica el tipo de discontinuidad que presenta. Evit.

b) Define una nueva función que contenga a $f(x)$ y sea continua en $\mathbb{R}$.

102. Considera la función $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2x^2 + x}{4x}$. Ev. $x=0$

a) Indica si presenta algún tipo de discontinuidad y en qué puntos.

b) Define una nueva función que contenga a $f(x)$ y sea continua para cualquier valor de x.

103. Estudia la continuidad de la función y clasifica sus diferentes tipos de discontinuidad. $x=-2$ Ev.

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{x^2 + 3x + 2}$$ $x=-1$ INC U S.F

104. ¿Cuáles son las diferencias entre las funciones $y = 2x - 1$ e $y = \dfrac{(2x-1)(x+2)}{x+2}$? ¿Son las dos funciones continuas? Si tienen alguna discontinuidad, decide de qué tipo es. Escribe, si es posible, la segunda función como función definida a trozos utilizando la primera.

105. Para las siguientes funciones, estudia la continuidad en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 3$, y clasifica los tipos de discontinuidad que presenten.

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x + 2 & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 5x + 2 & \text{si } x \le -1 \\ \dfrac{x+6}{x^2} & \text{si } -1 < x < 3 \\ x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

106. Estudia la continuidad en $x = 2$ de la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+5} - 3}{2 - x} & \text{si } x \ne 2 \\ -\dfrac{2}{3} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Clasifica el tipo de discontinuidad que presenta.

107. Considera la función definida a trozos, $f(x)$. Estudia su continuidad e indica los tipos de discontinuidad que presenta.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 2 \\ x + 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

108. Estudia la continuidad de la siguiente función en los puntos $x = 0$ y $x = 3$.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x-4} & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \le 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

109. Analiza la continuidad de esta función e indica los tipos de discontinuidades que presenta.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } 0 \le x < 2 \\ \dfrac{2}{3 - x} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

110. Expresa estas funciones como funciones definidas a trozos, y estudia su continuidad.

a) $y = |x|$
b) $y = |x + 5|$
c) $y = |3 - 2x|$
d) $y = |x^2 - x - 6|$
e) $y = |6 - x^2|$

111. Completa la función para que sea continua en $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ \boxed{-1} & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

112. Halla el valor de a en cada caso, para que cada una de estas funciones sea continua.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le 4 \\ x + a & \text{si } x > 4 \end{cases}$ $a=8$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 + a \cdot \ln x & \text{si } x > 1 \\ 3 - ax & \text{si } x \le 1 \end{cases}$ $a=1$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2 - x} & \text{si } x \le -2 \\ x^2 - 3x + a & \text{si } x > -2 \end{cases}$ $a=-8$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x} & \text{si } x \le -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ $a=-2$

e) $f(x) = \begin{cases} 3 \cdot a^x & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{12}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $a=2$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \le 0 \\ x + a^2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ ax + 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ $a=1$

g) $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & \text{si } x \le a \\ 5 & \text{si } x > a \end{cases}$ $a=2$

h) $f(x) = \begin{cases} 2 + a \cdot \cos x & \text{si } x \le 0 \\ 2^{-x} + 6x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $a=-4$

i) $f(x) = \begin{cases} \cos(x - 4) & \text{si } x \le 4 \\ 2^{x-2a} & \text{si } x > 4 \end{cases}$ $a=2$

113. Para cada función, calcula los valores de a y b para los que estas funciones son continuas.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 1 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ $a=2/3$ $b=-1$

b) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \le -1 \\ x^3 - a & \text{si } -1 < x \le 2 \\ bx - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $a=1$ $b=5$

114. Calcula los valores de a y b para los que estas funciones son continuas.

a) $f(x) = \begin{cases} a - x + 3 & \text{si } x \leq -2 \\ ax + b & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ \dfrac{2}{2 - x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ No es cont. $-3/2$

b) $f(x) = \begin{cases} ax + 3 & \text{si } x \leq -1 \\ bx^2 + 5 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2\sqrt{x + 3} + a & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $a = -1/2$, $b = -3/2$

c) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ a \cdot sen\, x + b & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ (x - \pi)^2 + a & \text{si } x > \pi \end{cases}$ $a = 3$, $b = 3$

d) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax^2 + bx & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 2^x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $a = -1$, $b = 3/2$

115. Estudia la continuidad de estas funciones según los valores de a.

a) $f(x) = \begin{cases} |-1 + 2x| & \text{si } x < 3 \\ a^x - 3 & \text{si } 0 \geq 3 \end{cases}$ $a = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} |3x - 4| & \text{si } x < 2 \\ a^x - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ $a = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} |4 - 5x| & \text{si } x < 1 \\ |a - 2| & \text{si } 0 \geq 1 \end{cases}$ $a = 1$ / $a = 3$

d) $f(x) = \begin{cases} |x - 4| & \text{si } x < a \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x \geq a \end{cases}$ $a = 1$ / $a = 4$

e) $f(x) = \begin{cases} sen^2\, x & \text{si } x \leq a \\ -cos^2\, x + x & \text{si } x > a \end{cases}$ $a = 1$

Teoremas de Bolzano y Weierstrass

116. Para cada una de las siguientes funciones, demuestra que $f(x) = 0$ para algún valor del intervalo $[0, 3]$. Menciona los resultados teóricos en los que te apoyas para hacer tus afirmaciones. Continuidad

a) $f(x) = x^7 - 2x^6 + 2x^2 + x - 1$ TB

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 3}{2x + 1}$ TB

c) $f(x) = \ln(x + 1) - 2x + 3$ TB

d) $f(x) = sen\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + x$ TB

e) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ TB

f) $f(x) = \begin{cases} x^3 + x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ TB

g) $f(x) = \begin{cases} \log_2(x + 1) + x - 2 & \text{si } x \geq 1 \\ 2x^2 - 3x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ TB

117. Dada la función $f(x) = \sqrt{x} + \ln(x) - 2$, demuestra que existe a tal que $(a, 0)$ es un punto de la función.

$[1, e^2]$ TB

118. Prueba que la función $f(x) = x^2 - 1 - \sqrt{x}$ corta al menos en un punto al eje OX. Sitúa este punto en un intervalo de longitud $\dfrac{1}{4}$. $\left[\frac{11}{3}, \frac{13}{8}\right]$ TB

119. Se considera la función $f(x) = e^{x-2} + x - 5$. Demuestra que se anula para algún valor de x y encuéntralo en un intervalo de longitud $\dfrac{1}{2}$. $[5/2, 3]$ TB

120. Prueba que la ecuación $x^3 + 6x^2 + 12x + 9 = 0$ tiene al menos una raíz real. Encuentra un intervalo de longitud 2 que la contenga. $[-4, -2]$ TB

121. Demuestra que la ecuación $x^3 + 3x^2 + x = 0$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $[-3, -2]$. Encuentra una aproximación de dicha raíz con un error menor que una décima. $(-2{,}7 ; -2{,}6)$ TB

122. Comprueba, mediante el teorema de Bolzano, que la siguiente ecuación tiene al menos dos raíces reales. $(-\pi, 0)$ $(0, \pi)$

$$2x^2 - 3x^4 + 3 = x(sen\, x + cos\, x) + cos\, x - sen\, x$$

123. Demuestra que las funciones $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2$ y $g(x) = -\log(x^4 + 2)$ se cortan al menos en dos puntos y sitúalos en intervalos de longitud 1. $f(x) = g(x)$ $(-2, -1)$, $(1, 2)$

124. Prueba que las funciones $f(x) = 3 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ $f(x) = g(x)$ y $g(x) = x^4 - 3x^2 + x - 1$ se cortan al menos en dos puntos y localiza cada uno de los puntos en un intervalo de longitud $\dfrac{1}{2}$. $\left[-\frac{9}{4}, -\frac{7}{4}\right]$; $[7/4, 9/4]$

125. Demuestra que la función $f(x) = x + 1$ tiene al menos un punto de corte con estas funciones.

a) e^{x-1} $[2, 3]$ c) $\ln(x) + 3$ $[0{,}1 ; 1]$

b) $x^3 + 3x$ $[0, 1]$ d) $sen\, x$ $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$

Calcula, con un error menor que una décima, la abscisa de uno de los puntos de corte de cada una.

126. Dadas las funciones $f(x) = 2\, sen\, x$ y $g(x) = -3x + 1$, demuestra que se cortan al menos en un punto y determina un intervalo menor que $\dfrac{\pi}{2}$ en el que se encuentre. $[0, \pi/2]$

127. Dadas las funciones $f(x) = x\, sen\, x$ y $g(x) = \ln x$, justifica que existe un punto del intervalo $[2, 3]$ donde ambas funciones toman el mismo valor. $[2, 3]$

128. Justifica que la función $f(x) = \sqrt{x + 6}$ toma todos los valores entre 2 y 3 en el intervalo $[-2, 3]$. TVI

129. Justifica que la función $f(x) = \dfrac{3x}{x - 2}$ toma el valor 6 para algún valor $x \in (1, 5)$. TVI

130. Demuestra que existe un punto $x = c$ en el que la función $f(x) = x^2 + x \cdot 2^x$ toma el valor 2. Encuéntralo, aproximando su expresión hasta las centésimas. TVI

131. Demuestra que $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & \text{si } x < 1 \\ \ln x + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ alcanza un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo $[0, 5]$.