52 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$:

a. Calcula las matrices $C = A \cdot B$ y $D = A^t \cdot B^t$.

b. Determina para qué valores de *a* son invertibles las matrices C y D y calcula C^{-1} y D^{-1} cuando sea posible.

53 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde *x* es cualquier número real; encuentra los valores de *x* para los que $A \cdot B$ sea invertible.

54 Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$:

a. Calcula si es posible A^{-1}.

b. Resuelve la ecuación matricial: $A \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix}$

55 A partir de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$:

a. Calcula $A^2 - 4A + 3I_3$.

b. Demuestra que $A^{-1} = \frac{1}{3}(4I_3 - A)$.

c. Calcula $(A - 2I)^{-1}$.

56 Sea A una matriz cuadrada de orden *n* que verifica $A^2 = I$:

a. Expresa A^{-1} en función de A.

b. Expresa A^n en función de A e I, para cualquier número natural, *n*.

57 La matriz A es una matriz cuadrada que verifica $A^2 + 2A = I$:

a. Demuestra que existe la inversa de A y exprésala en función de A e I.

b. Calcula dos números, *p* y *q*, tales que $A^3 = pI + qA$.

c. Calcula el valor de *k* para que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ cumpla: $A^2 + 2A = I$

58 Sea M una matriz cuadrada de orden *n* que verifica la igualdad $M^2 - 2M = 3I$:

a. Averigua si existe la matriz inversa de M y, en caso afirmativo, exprésala en términos de M e I.

b. Expresa M^3 como combinación lineal de M e I.

c. Halla todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifiquen la identidad del enunciado.

59 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a. Halla dos constantes, *a* y *b*, tales que $A^2 = aA + bI$.

b. Obtén la matriz A^5 utilizando solo la expresión del apartado anterior.

60 Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a. Halla dos constantes, *a* y *b*, tales que $A^2 = aA + bI$.

b. Calcula A^5 utilizando únicamente el resultado obtenido en el apartado anterior.

c. Halla todas las matrices, X, que cumplan $(A - X) \cdot (A + X) = A^2 - X^2$.

61 Resuelve la ecuación matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

62 Dadas $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, obtén la matriz, X, de orden 2 que cumpla $A \cdot X \cdot B = A + B$.

63 Halla una matriz, X, tal que $A^{-1} \cdot X \cdot A = B$, donde $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

64 Dada la ecuación $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde X es una matriz cuadrada de orden 2:

a. Calcula los valores de *a* para que la ecuación tenga solución.

b. Calcula X para $a = 1$.

65 Encuentra todas las matrices, X, tales que $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

66 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$:

a. Determina si A y B son invertibles y, si lo son, calcula la matriz inversa.

b. Resuelve la ecuación $X \cdot A - B = 2I$.

67 Halla los valores de *k* para los que existe la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}$ y calcúlala para $k = 6$.

2.10. Dada una matriz A de orden 3, contesta razonadamente a estas preguntas:

a) ¿$A^t \cdot A$ es simétrica?

b) ¿$A \cdot A^t$ es simétrica?

c) ¿$C^t \cdot A \cdot C$ es simétrica para cualquier matriz C de orden 3?

2.11. Sabiendo que $2A - B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ y que

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix},$$

a) ¿cuáles son las dimensiones de A y B?

b) Calcula las matrices A y B.

2.12. a) Considera la matriz $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; escribe dos matrices de orden 3 diferentes y multiplica cada una de ellas por D.

b) ¿Cómo actúa D al multiplicarla por una matriz cualquier A?

2.13. a) Calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$, si es posible, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) ¿Se pueden encontrar matrices C y D para las que existan los productos $A \cdot C \cdot B$ y $B \cdot D \cdot A$?

2.14. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Indica todos los posibles productos entre ellas y calcula el elemento $(2 \quad 1)$ de cada producto.

2.15. Comprueba con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ que se cumple $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$.

2.16. Calcula, si es posible, la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$$

para los casos en los que $a = 2$ y $a = 0$.

2.17. Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

halla los valores de x para los cuales la matriz ... es inversible. Halla la inversa de M para $x = 2$.

2.18. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ k & 1 & k \\ 0 & -k & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Halla los valores de k para los que la ... tiene inversa.

b) Calcula A^{-1} para $k = 1$.

2.19. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Encuentra los valores de a para los que la ... no es inversible.

b) Calcula A^{-1} para $a = 2$.

2.20. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Encuentra los valores de λ para los que la ... es inversible.

b) Calcula A^{-1} para $\lambda = 2$ y $\lambda = 0$.

2.21. Determina para qué valores de m tiene inversa ... matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

y hállala para $m = 2$.

2.22. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Halla los valores de k para los que la matriz $A \cdot B$ tiene inversa.
b) Halla los valores de k para los que la matriz $B \cdot A$ tiene inversa.

2.23. Dada la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}.$$

a) Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k.
b) Para $k = 0$, halla la inversa de A.

2.24. De las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{y } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

determina cuáles tienen inversa y calcúlalas.

2.25. Halla el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

2.26. Halla el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.27. Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, ¿para qué valores de λ la matriz $3B + B^2$ no tiene inversa?

2.28. Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Halla los valores de α para los que la matriz A tiene inversa.
b) Calcula, si es posible, la inversa de la matriz A^2 para $\alpha = 0$.

2.29. Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula la matriz inversa de A.
b) Calcula A^{127} y A^{128}.
c) Determina x e y tal que $A \cdot B = B \cdot A$.

2.30. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Halla A^n para todo entero positivo n.
b) Calcula, si existe, la inversa de la matriz A y la de la matriz $I_3 + A$.

2.31. Se consideran las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde λ es cualquier número real.

a) Encuentra los valores de λ para los que $A \cdot B$ es inversible.
b) Encuentra los valores de λ para los que $B \cdot A$ es inversible.
c) Dados a y b, números reales cualesquiera, ¿puede ser el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ compatible determinado?

2.32. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Halla A^{-1}.
b) Halla la matriz X, tal que: $A \cdot X \cdot A^t = B$ (donde A^t significa la matriz traspuesta de A).

2.33. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X - A = B - C$.