TEMA 7. 2º BACH

1. Sea la función $f(x) = e^{-x} + 2x - 1$. ¿Se puede afirmar que la función tiene alguna raíz real en el intervalo [-2,-1]? (1,5 puntos)
2. Calcula los siguientes límites:

   a. $\lim_{x\to\infty} \frac{5^x+4^x}{9^x+3^x}$ b. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-3x+2}{x^3+x^2}\right)^{\frac{2x^2-3}{x-2}}$ c. $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-1}\right)$

   d. Calcula el valor de a para que $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax-3} - \sqrt{x^2-3x+5}) = \frac{5}{2}$(2 puntos)

3. Calcula las asíntotas de la siguiente función. $\begin{cases} \frac{5x-1}{x+1} & si\ x \le 1 \\ \frac{2x^2+3}{x-3} & si\ x > 1 \end{cases}$ (2 puntos)
4. Estudia la continuidad de la siguiente función y si las hay, di de qué tipo son las discontinuidades.

   $f(x) = \begin{cases} \frac{x+7}{x+3}\ si\ x < -3 \\ x^2 - 3x + 6\ \ si -3 \le x < 1 \\ |x-4|\ \ si\ x \ge 1 \end{cases}$ (2 puntos)

5. Dada la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, ¿Se puede asegurar que no existe ningún punto en el intervalo $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ en el que la función tome el valor 1?(1,5 puntos)
6. Calcula el valor de k$\in \mathbb{R}$ para el cual: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+x}\right)^{ax-1} = \frac{1}{e}$ (1 punto)

TEMA 7 2°A

(1) $f(x) = e^{-x} + 2x - 1$ en $[-2,-1]$

(1,5) f continua en $[-2,-1]$ por ser combinación de exponencial y polinómica.

$f(-2) = e^{2} + 2(-2) - 1 = 2,39 > 0$

$f(-1) = e^{1} + 2(-1) - 1 = -0,28 < 0$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont } [-2,-1] \\ f(-2)\cdot f(-1) < 0 \end{array}\right| \xrightarrow[\text{T. Bolzano}]{} \exists\, c \in (-2,-1) \,/\, f(c) = 0$

Si que tiene una raíz real en el intervalo $(-2,-1)$

(2) a) $\lim_{x\to\infty} \frac{5^x + 4^x}{9^x + 3^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5^x}{9^x} + \frac{4^x}{9^x}}{\frac{9^x}{9^x} + \frac{3^x}{9^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{5}{9}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x}{1 + \left(\frac{3}{9}\right)^x} = \frac{0}{1} = 0$

(2)

b) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2}\right)^{\frac{2x^2-3}{x-2}} = [1^\infty] = e^{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-3x+2}{x^3+x^2} - 1\right]\cdot\frac{2x^2-3}{x-2}} =$

$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{-3x+2-x^2}{x^3+x^2}\cdot\frac{2x^2-3}{x-2}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{-6x^3+9x+4x^2-6-2x^4+3x^2}{x^4-2x^3+x^3-2x^2}} =$

$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^4-6x^3+7x^2+9x-6}{x^4-x^3-2x^2}} = e^{-2}$

c) $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-1}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}\cdot(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}\cdot(\sqrt{x}+1)}{x-1} =$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(x-1)}\sqrt{x-1}} = \frac{2}{0} = +\infty$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax-3} - \sqrt{x^2-3x+5}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+ax-3) - (x^2-3x+5)}{\sqrt{x^2+ax-3} + \sqrt{x^2-3x+5}} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{(a+3)x - 8}{\sqrt{x^2+ax-3} + \sqrt{x^2-3x+5}} = \frac{a+3}{1+1} = \frac{a+3}{2} = \frac{5}{2} \to a+3 = 5 \to a = 2$

(3) $f(x) = \begin{cases} \text{(A)}\ \frac{5x-1}{x+1} & \text{si } x \le 1 \quad \text{Dom } (-\infty, 1] \setminus \{-1\} \\ \text{(B)}\ \frac{2x^2+3}{x-3} & \text{si } x > 1 \quad \text{Dom } (1, +\infty) \setminus \{3\} \end{cases}$

(2)

(A) AV $\lim_{x\to -1} \frac{5x-1}{x+1} = \frac{-6}{0} = \pm\infty \to \boxed{x = -1}$

AH $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x-1}{x+1} = 5 \to \boxed{y = 5}$

AO No tiene porque hay AH

③ AV $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2+3}{x-3} = \frac{21}{0} = \pm\infty \to x=3$

AH $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3}{x-3} = \pm\infty$ No tiene

AO $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3}{x^2-3x} = 2$ $y = 2x+6$

$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+3}{x-3} - 2x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{2x^2}+3-\cancel{2x^2}+6x}{x-3} = 6$

④ (2)

$$f(x) = \begin{cases} ① \frac{x+7}{x+3} & \text{si } x < -3 \\ ② x^2-3x+6 & \text{si } -3 \le x < 1 \\ ③ -x+4 & \text{si } 1 \le x \le 4 \\ ④ x-4 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{si } x \ge 4 \\ -x+4 & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

① Continua en su intervalo de definición, porque $-3 \notin$ dom.
② Continua por ser polinómica ③ y ④ también

En $x=-3$

$f(-3) = 9+9+6 = 24$

$\lim_{x\to -3^-} \frac{x+7}{x+3} = \frac{10}{0} = -\infty$ $\neq$

$\lim_{x\to -3^+} x^2-3x+6 = 24$

Discont. inevitable de salto infinito

En $x=1$

$f(1) = 3$

$\lim_{x\to 1^-} x^2-3x+6 = 4$ $\neq$

$\lim_{x\to 1^+} -x+4 = 3$

Disc. inevitable de salto finito

En $x=4$

$f(4) = 0$

$\lim_{x\to 4^-} -x+4 = 0$ $\|$

$\lim_{x\to 4^+} x-4 = 0$

Continua.

⑤ (1,5)

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

f cont en $\mathbb{R} \to f$ cont $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ $\longrightarrow$ No se puede aplicar el TVM.

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{9}} = \frac{9}{10}$ $\quad f\left(-\frac{1}{3}\right) \not< 1 \not< f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$ $\quad 0{,}9 \quad 0{,}8$

⑥ (1)

$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+x}\right)^{ax-1} = \frac{1}{e}$

$\| \quad e^{\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2-1}{x^2+x} - 1\right] ax-1} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{-1-x}{x^2+x} \cdot (ax-1)} =$

$= e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{(-1-x)(ax-1)}{x^2+x}} = e^{\frac{-a}{1}} = e^{-1} \to -a=-1 \to \boxed{a=1}$