CONTROL LÍMITES 1º BACHILLERATO B

1. Estudia la continuidad de la siguiente función, si hay discontinuidades di de qué tipo son.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x+1} & si\ x<-1\\ 3x+1 & si -1\leq x\leq 2\\ 2x-5 & si > 2\end{cases}$$

2. Averigua a, b para que la función f(x) sea continua

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+b}{x-1} & si\ x\leq 0\\ \dfrac{4}{x-2} & si\ 0<x<1\\ \dfrac{x^2+1}{ax} & si\ x\geq 1\end{cases}$$

3. Calcula todas las asíntotas de las siguientes funciones: (2 PUNTOS)

   a. $f(x)=\frac{4x^3-7x^2+4x}{x^2-9}$ b. $f(x)=\frac{5x-2}{4x^2-1}$

4. Calcula los siguientes límites: (5 PUNTOS)

   a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{x-1}$ b. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+5}{x-3}$ c. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2-3x}{5x^2+4x-7}\right)^{x^2+7}$ d. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-7}{x+3}-\dfrac{3x^2+5x}{2x-8}\right)$ e. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

5. El precio en euros de x litros de aceite comprados en una almazara viene dado por la función:

$$P(x)=\begin{cases}3x & si\ \ 0\leq x\leq 20\\ \sqrt{ax^2+2000} & si\ x>20\end{cases}$$

   a. Determina el valor de la constante a para que la función P(x) sea continua.
   b. Si se comprasen muchísimos litros de aceite, ¿A cuánto saldría aproximadamente el precio de cada litro? Tener en cuenta que la función es el precio para x litros. (1 punto)

TEMA 6 1ºB 2022-23

① $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x+1} & \text{si } x<-1 \\ 3x+1 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ 2x-5 & \text{si } x>2 \end{cases}$

Continua en su intervalo de definición porque $-1 \notin (-\infty,-1)$

Cont. por ser polinómica

Cont por ser polinómica

En $x=-1$

$f(-1)=-2$

$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{2}{0} = \pm\infty$

$\nexists$

$\lim_{x\to -1^+} 3x+1 = -2$

Discontinuidad inevitable de salto infinito en $x=-1$

En $x=2$

$f(2)=7$

$\lim_{x\to 2^-} 3x+1 = 7$

$\nexists$

$\lim_{x\to 2^+} 2x-5 = -1$

Discontinuidad inevitable de salto finito en $x=2$

② $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+b}{x-1} & \text{si } x\le 0 \\ \frac{4}{x-2} & \text{si } 0<x<1 \\ \frac{x^2+1}{ax} & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

Continua porque $1 \notin (-\infty,0]$

Continua porque $2 \notin (0,1)$

Continua porque $0 \notin [1,+\infty)$

En $x=0$

$f(0) = \frac{b}{-1} = b$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{3x+b}{x-1} = -b$

$\|$ $\Rightarrow -b=-2$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{4}{x-2} = -2$

$\boxed{b=2}$

En $x=1$

$f(1) = \frac{x^2+1}{ax} = \frac{2}{a}$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{4}{x-2} = \frac{4}{-1} = -4$

$\|$ $\rightarrow \frac{2}{a}=-4$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{ax} = \frac{2}{a}$

$\boxed{a=-\frac{1}{2}}$

Si $a=-1/2$, $b=2$ $f(x)$ continua en $\mathbb{R}$

③ a) $f(x) = \frac{4x^3-7x^2+4x}{x^2-9}$ Dom f: $\mathbb{R}-\{-3,3\}$

AV $\lim_{x\to -3} \frac{4x^3-7x^2+4x}{x^2-9} = \pm\infty \rightarrow \boxed{x=-3}$

AV $\lim_{x\to 3} \frac{4x^3-7x^2+4x}{x^2-9} = \pm\infty \rightarrow \boxed{x=+3}$

AH $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{4x^3-7x^2+4x}{x^2-9} = \pm\infty$ $\nexists$

AO $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^3-7x^2+4x}{x^3-9x} = 4$

$n = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{4x^3}-7x^2+4x-\cancel{4x^3}+36x}{x^2-9} = -7$

$y=4x-7$

b) $f(x) = \frac{6x-2}{4x^2-1}$ Dom f: $\mathbb{R}-\{-1/2, 1/2\}$

AV $\lim_{x\to -1/2} f(x) = \pm\infty \rightarrow x=-1/2$

$\lim_{x\to 1/2} f(x) = \pm\infty \rightarrow x=1/2$

AH $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \rightarrow y=0$

AO No tiene, porque hay AH

4) a) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{2-x-1}{(x-1)(\sqrt{2-x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{(x-1)[\sqrt{2-x}+1]} = \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)}{\cancel{(x-1)}[\sqrt{2-x}+1]}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{\sqrt{2-x}+1} = -\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+5}{x-3} = \frac{14}{0}$ $\to \lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{+}{-} = -\infty$

$\quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{+}{+} = +\infty$ $\neq$ $\nexists \lim$

c) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{5x^2-3x}{5x^2+4x-7}\right)^{x^2+7} = [1^\infty] = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-3x-5x^2-4x+7}{5x^2+4x-7}\cdot(x^2+7)} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{(-7x+7)(x^2+7)}{5x^2+4x-7}}$

$= e^{-\infty} = 0$

d) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2-7}{x+3} - \frac{3x^2+5x}{2x-8}\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-8x^2-14x+56-3x^3-9x^2-5x^2-15x}{2x^2-8x+6x-24} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3-22x^2-29x+56}{2x^2-2x-24} = -\infty$

e) $\lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right] = [\infty-\infty] = \lim_{x\to+\infty} \frac{[\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}][\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}]}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \frac{2}{2} = 1$

5) $P(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ \sqrt{ax^2+2000} & \text{si } x > 20 \end{cases}$ Cont. por ser polinómico

a) En $x=20$

$f(20) = 60$

$\lim_{x\to 20^-} 3x = 60$ $\qquad \sqrt{400a+2000} = 60$

$\lim_{x\to 20^+} \sqrt{ax^2+2000} = \sqrt{400a+2000}$ $\qquad \boxed{a=4}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2000}}{x} = \frac{\sqrt{4}}{1} = 2$

Saldría a 2€/litro.