TEMA 3. 2º BACHILLERATO A

1. Sea el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ (a-1)x+y+z=a \\ x+(a-1)y-z=0 \end{array}\right\}$

a) Discute el sistema en función de a

b) Resolver cuando es un sistema compatible determinado

c) Resolver cuando tiene infinitas soluciones.

2. Dado el sistema siguiente, discutir y resolver cuando sea posible

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+4z=0 \\ -x+ay-2z=0 \\ y+z=0 \end{array}\right\}$$

3. Discute el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r} x+y+5z=0 \\ x+2y+2az=a \\ 2x-3z=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\}$

Halla el valor de a para que sea compatible. Resuelve para ese valor de a .

4. Calcula las edades de un padre, una madre y un hijo sabiendo que suman 72. Que hace 4 años la edad del padre más la de la madre, es el séptuplo de la del hijo. Y que dentro de 6 años, la edad del hijo es el triple de la diferencia de las edades entre el padre y la madre.

TEMA 3   2º Bach A

(1)
$$\left.\begin{array}{l} y+z=1 \\ (a-1)x+y+z=a \\ x+(a-1)y-z=0 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$|A|=(a-1)^2+1-1+a-1 = a^2-2a+\cancel{1}+\cancel{1}-\cancel{1}+a-1 = a^2-a=0 \Rightarrow a(a-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

1 a) Si $a\neq 0,\ a\neq 1 \Rightarrow rg\ A = 3 = rg\ A^* =$ nº incógnitas SCD

Si $a=0$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg\ A = 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg\ A^* = 2$$

$\Big\}$ $rg\ A = 2 = rg\ A^* <$ nº incógnitas SCI

Si $a=1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg\ A = 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1-1=0 \Rightarrow rg\ A^* = 2$$

$\Big\}$ $rg\ A = 2 = rg\ A^* <$ nº incógnitas SCI.

0,5 b)
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 \end{vmatrix}}{a(a-1)} = \frac{-1+a(a-1)-(a-1)+a}{a(a-1)} = \frac{-\cancel{1}+a^2-a-\cancel{a}+\cancel{1}+\cancel{a}}{a(a-1)} = \frac{a^2-a}{a(a-1)} = \frac{\cancel{a}(a-1)}{\cancel{a}(a-1)} =$$

$$x = \frac{(a-1)}{(a-1)} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{a(a-1)} = \frac{1-a+a-1}{a(a-1)} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & 0 \end{vmatrix}}{a(a-1)} = \frac{(a-1)^2+a-1}{a(a-1)} = \frac{a^2-2a+1+a-1}{a(a-1)} = \frac{a^2-a}{a(a-1)} = 1$$

Solución $(1,\ 0,\ 1)\ \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

0,5 c) Si $a=0$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z=\lambda} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1-\lambda \\ -1 & 1 & -\lambda \end{array}\right) \quad |B| = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}}{1} = 1-\lambda+\lambda = 1$$

$(1,\ 1-\lambda,\ \lambda)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}}{1} = 1-\lambda$$

Si $a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z=\lambda} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1-\lambda \\ 1 & 0 & \lambda \end{array}\right)$$

$|B| = -1$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ \lambda & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-\lambda}{-1} = \lambda$$

Solución $(\lambda, 1-\lambda, \lambda)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-(1-\lambda)}{-1} = 1-\lambda$$

(2)
$$\left.\begin{array}{l} ax+y+4z=0 \\ -x+ay-2z=0 \\ y+z=0 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 4 & 0 \\ -1 & a & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$|A| = a^2 - 4 + 2a + 1 = a^2 + 2a - 3 = 0$ → $a_1 = 1$, $a_2 = -3$

Si $a \neq 1$, $a \neq -3$ rg A = rg A^* = 3 = nº inc. ⇒ SCD

(1) Si $a=1$, $a=-3$ rg A = rg A^* = 2 < nº inc ⇒ SCI (Por ser homogéneo)

(0,5) Si $a \neq 1$, $a \neq 3$ por ser SCD y homogéneo, la solución $(0,0,0)$

(0,5) Si $a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right) \xrightarrow{z=\lambda} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -4\lambda \\ -1 & 1 & 2\lambda \end{array}\right)$$

$|B| = 2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4\lambda & 1 \\ 2\lambda & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-4\lambda - 2\lambda}{2} = \frac{-6\lambda}{2} = -3\lambda$$

$(-3\lambda, -\lambda, \lambda)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4\lambda \\ -1 & 2\lambda \end{vmatrix}}{2} = \frac{2\lambda - 4\lambda}{2} = \frac{-2\lambda}{2} = -\lambda$$

(0,5) Si $a=-3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right) \xrightarrow{z=\lambda} \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & -4\lambda \\ -1 & -3 & 2\lambda \end{array}\right)$$

$|B| = 10$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4\lambda & 1 \\ 2\lambda & -3 \end{vmatrix}}{10} = \frac{+12\lambda - 2\lambda}{10} = \frac{+10\lambda}{10} = \lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -4\lambda \\ -1 & 2\lambda \end{vmatrix}}{10} = \frac{-6\lambda - 4\lambda}{10} = \frac{-10\lambda}{10} = -\lambda$$

$(\lambda, -\lambda, \lambda)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

(3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2a & a \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2a \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4a - 20 + 3 = -23 + 4a = 0 \rightarrow a = \frac{23}{4}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 23/2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{23}{2} - 6 - 3 - 4 = -\frac{49}{2}$

Si $a \neq \frac{23}{4} \rightarrow rg\ A = 3$

Si $a = \frac{23}{4} \rightarrow rg\ A = 3$

$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2a & a \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a\left[(-10-3) - (3+2)\right] = a(-13-5) = -18a = 0$

$a = 0$

Luego si $a \neq 0$ $\quad rg\ A = 3 \neq rg\ A^* = 4$ SI

si $a \neq \frac{23}{4}$ $\quad rg\ A = 3 \neq rg\ A^* = 4$ SI

Si $a = \frac{23}{4}$ $\quad rg\ A = 3 \neq rg\ A^* = 4$ SI

Si $a = 0$ $\quad rg\ A = 3 = rg\ A^* = n^o$ inc. SCD

Resolver: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right)$ Por ser homogéneo y SCD La solución es $(0,0,0)$

(4) $x =$ Padre
$y =$ Madre
$z =$ Hijo

$\begin{cases} x+y+z = 72 \\ (x-4) + (y-4) = 7(z-4) \\ (z+6) = 3\left((x+6) - (y+6)\right) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x+y+z = 72 \\ x+y-7z = -20 \\ 3x-3y-z = 6 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 72 \\ 1 & 1 & -7 & -20 \\ 3 & -3 & -1 & 6 \end{array}\right)$ $\quad |A| = (-1-3-21) - (3+21-1) = -25-23 = -48$

SCD

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 72 & 1 & 1 \\ -20 & 1 & -7 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{-48} = \dfrac{-1592}{-48} = 33{,}17$ Padre

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 72 & 1 \\ 1 & -20 & -7 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix}}{-48} = \dfrac{-1352}{-48} = 27{,}33$ Madre

$z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 72 \\ 1 & 1 & -20 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}}{-48} = \dfrac{-552}{-48} = 11{,}5$ Hijo