CONTROL TEMAS 8 Y 9 2º BACHILLERATO A

1. Calcula el valor de la derivada en el punto (3,-1) de la siguiente función:
   $5y^3 - 3y^2x + 2xy - 8x^2 + 5 = 0$ (1 punto)

2. Estudia si la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 & si\ 1 < x \leq 2 \end{cases}$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle.

   En caso afirmativo, calcula el punto que lo verifica. (1 punto)

3. Calcula las siguientes derivadas:

   a. $y = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x^2-6x+2}\right)^{4x-3}$ b. $y = \sqrt[x]{\frac{\cos\ x}{e^{tg 2x}}}$ (1,5 puntos)

4. Entre todos los rectángulos de perímetro 20 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor? (1 punto)

5. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determinar los valores a, b,c,d para que se cumplan las condiciones:
   a. Que la tangente a la gráfica de f en el punto x=0 sea paralela a la recta y+1=0
   b. Tenga un máximo en x=-1
   c. Tenga un punto de inflexión en x=1 (1,5 puntos)

6. Calcula los siguientes límites:
   a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x - e^{-x} - x}{x\, sen x}$
   b. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{\ln x}\right)$
   c. $\lim\limits_{x\to \infty} (2^x - 1)^{\frac{2}{x+1}}$
   d. Halla a y b de modo que se cumpla $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen\ 2x}{bx^3+ax} = 4$ (4 puntos)

CONTROL TEMAS 8 Y 9 2º A

① (1) $5y^3 - 3y^2x + 2xy - 8x^2 + 5 = 0$

$15y^2y' - 6yy'x - 3y^2 + 2y + 2xy' - 16x = 0$

$y'(15y^2 - 6yx + 2x) = 3y^2 - 2y + 16x$

$y' = \dfrac{3y^2 - 2y + 16x}{15y^2 - 6yx + 2x}$

En $(3,-1)$ $y' = \dfrac{3\cdot(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 16\cdot 3}{15(-1)^2 - 6\cdot 3(-1) + 2\cdot 3} = \dfrac{53}{39}$

② (1) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases} \longrightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \le 1 \\ -3x + \frac{7}{2} & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$

¿ f continua en $[0,2]$? Lo es en cada trozo porque la raíz está definida para $x \ge 0$ y la otra es polinómica.

En $x = 1$
$f(1) = \sqrt{1} = 1$
$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{x} = 1$
$\lim_{x \to 1^+} -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} - 1 = 1$

$\Rightarrow$ Luego es continua en $x = 1$
Por lo tanto, f continua en $[0,2]$

¿f derivable en $(0,2)$? La derivada existe en cada intervalo de definición

En $x=1$ $f'(1^-) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$

$f'(1^+) = -3\cdot 1 + \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Es derivable en $(0,2)$

$f(0) = \sqrt{0} = 0$
$f(2) = -\frac{3}{2}\cdot 4 + \frac{7}{2}\cdot 2 - 1 = 0$
$\Rightarrow f(0) = f(2)$

f continua en $[0,2]$
f derivable en $(0,2)$
$f(0) = f(2)$
$\xrightarrow[\text{T. Rolle}]{} \exists c \in (0,2) / f'(c) = 0$

Para calcular c, igualamos los dos trozos.

$\dfrac{1}{2\sqrt{c}} = 0$ $\nexists$ $-3c + \dfrac{7}{2} = 0 \rightarrow c = \dfrac{7}{6} \in (0,2) \Rightarrow \boxed{c = \frac{7}{6}}$

③ (1,5) a) $y = \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2 - 6x + 2}\right)^{4x-3}$

$\ln y = \ln\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2 - 6x + 2}\right)^{4x-3} = (4x-3)\ln\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2 - 6x + 2}\right)$

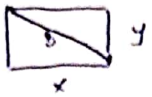
$\dfrac{y'}{\cancel{y}} = \left[4\cdot\ln\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2-6x+2}\right) + (4x-3)\dfrac{\frac{\cos x\,(x^2-6x+2) - \operatorname{sen} x\,(2x-6)}{(x^2-6x+2)^2}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x^2-6x+2}}\right]\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2-6x+2}\right)^{4x-3}$

b) $y = \sqrt[x]{\frac{\cos x}{e^{tg 2x}}} = \left(\frac{\cos x}{e^{tg 2x}}\right)^{1/x}$

$\ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{\cos x}{e^{tg 2x}}\right)$

$\frac{y'}{\cancel{y}} = \left[-\frac{1}{x^2} \cdot \ln\left(\frac{\cos x}{e^{tg 2x}}\right) + \frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{(-\operatorname{sen} x) e^{tg 2x} + \cos x \cdot e^{tg 2x} (1 + tg^2 2x) \cdot 2}{[e^{tg 2x}]^2}}{\frac{\cos x}{e^{tg 2x}}} \right] \cdot \sqrt[x]{\frac{\cos x}{e^{tg 2x}}}$

(4)
(1)



$2x + 2y = 20 \rightarrow x + y = 10 \rightarrow y = 10 - x$

$D(x) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (10-x)^2} = \sqrt{x^2 + 100 - 20x + x^2} = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$

$D'(x) = \frac{4x - 20}{2\sqrt{2x^2 - 20x + 100}} = \frac{2x - 10}{\sqrt{2x^2 - 20x + 10}} = 0 \rightarrow x = 5$

$(0,5)$ $D' < 0$
$(5, 20)$ $D' > 0$ $\Rightarrow$ Mínimo en $x = 5$

$y = 10 - 5 = 5$

$D = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

(5) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$

(1,5) a) En $x = 0$ si es paralela, tiene la misma pendiente que $y = -1 \rightarrow m = 0$

$f'(0) = 0 \rightarrow 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \rightarrow \boxed{c = 0}$

b) Máximo $x = -1 \rightarrow f'(-1) = 0 \rightarrow 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0$

$\boxed{3a - 2b + c = 0}$

c) Punto inflexión en $x = 1 \rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow \boxed{6a + 2b = 0}$

$$\left.\begin{array}{l} c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 6a + 2b = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{array} \quad d \in \mathbb{R}$$

(6) a) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - e^{-x} - x}{x \cdot \operatorname{sen} x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{-2 \operatorname{sen} 2x + e^{-x} - 1}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

(4)

$= \lim_{x \to 0} \frac{-4 \cos 2x - e^{-x}}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{-4 - 1}{2} = -\frac{5}{2}$

b) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{\ln x}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to 1} \frac{2x \ln x - 3(x-1)}{(x-1) \ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$= \lim_{x \to 1} \frac{2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} - 3}{\ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x}} = \frac{2-3}{0} = -\frac{1}{0} \rightarrow \lim_{x \to 1^-} = \frac{-}{-} = +\infty$

$\lim_{x \to 1^+} = \frac{-}{+} = -\infty$

c) $\lim_{x\to\infty} (2^x-1)^{\frac{2}{x+1}} = [\infty^0] = e^{2\ln 2}$

$\ln\left[\lim_{x\to\infty}(2^x-1)^{\frac{2}{x+1}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\ln\left[(2^x-1)^{\frac{2}{x+1}}\right]\right] =$

$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2}{x+1}\cdot\ln(2^x-1)\right] = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln(2^x-1)}{x+1} \underset{\text{L'H}}{=}$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{2^x\cdot\ln 2}{2^x-1}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}\cdot\ln 2}{2^x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2^{x+1}\ln 2}{2^{x+1}}}{\frac{2^x}{2^{x+1}}-\frac{1}{2^{x+1}}} =$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln 2}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{x+1}}} = \frac{\ln 2}{\frac{1}{2}} = 2\ln 2$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{bx^3+ax} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{3bx^2+a} = \frac{2}{a} = 4 \rightarrow a = \frac{1}{2} \quad b\in\mathbb{R}$