Ecuaciones de rectas y planos

45. Sean los puntos $A(2, 1, 1)$, $B(-3, 0, 2)$ y $C(1, -2, 4)$. Indica si alguno de estos puntos pertenece a la recta de ecuación r: $\left.\begin{array}{l} x = 4 - t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{array}\right\}$.

$A, B \notin r$

$C \in r$

46. Determina el punto de la recta r: $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z - 6 = 0 \end{array}\right\}$ cuya segunda coordenada sea nula.

$P(2, 0, -2)$

47. Determina todas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(1, 2, 2)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (-1, 2, 3)$.

$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{3}$

48. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(3, 5, -1)$ y $B(2, 1, -2)$.

$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+1}{-1}$

49. Determina la ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(-3, 2, 7)$ y es paralela al:

a) Eje OX b) Eje OY c) Eje OZ

$y = 2 \quad z = 7$ $\quad x = -3 \quad z = 7$ $\quad x = -3 \quad y = 2$

50. Determina, en cada caso, las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P y es paralela a la recta r.

a) $P(1, -3, 0)$ y r: $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{5} = z$

b) $P(5, 1, 1)$ y r: $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{array}\right\}$

51. ¿Existe algún valor de m para el que el punto $M(m, m, m)$ pertenezca a la recta r? Estúdialo en cada caso.

a) r: $(5 - 3t, 1 + t, -1 + 3t)$ $\quad m = 2$

b) r: $x - 1 = \frac{y+2}{-2} = z$ $\quad \nexists$

52. Calcula los valores de m y n para los cuales el punto $P(m + n, 2m - n, 2)$ pertenezca a la recta que pasa por los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(-3, 0, -1)$. $m = 5, n = 7$

53. ¿Pertenece el punto $P(-1, 2, 7)$ a la recta r: $\left.\begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{array}\right\}$?

En caso negativo, obtén la ecuación en forma paramétrica de la recta paralela a r que pasa por dicho punto.

$x = -1 + \lambda, \ y = 2 - \lambda, \ z = 7 + 3\lambda$

54. Determina todas las ecuaciones del plano que contiene a los puntos $A(2, 3, -1)$, $B(0, 1, 1)$ y $C(3, 0, 0)$.

$\pi: x + y + 2z - 3 = 0$

55. Determina la ecuación general del plano que contiene al punto $P(2, 1, 1)$ y cuyos vectores directores son $\vec{u} = (1, 0, 1)$ y $\vec{v} = (-2, 1, 0)$. $x + 2y - z - 3 = 0$

56. Determina la ecuación general del plano que contiene al punto $P(-3, 3, 1)$ y cuyo vector normal es $\vec{n} = (2, 1, -1)$.

$\pi: 2x + y - z + 4 = 0$

57. El plano $mx + 3y - 2z + 4 = 0$ pasa por el punto $P(1, -2, 1)$. Calcula el valor de m. $m = 4$

58. Determina la ecuación del plano que contiene al punto $P(3, 3, 1)$ y es paralelo al plano de ecuación $x - y + z - 1 = 0$.

$\pi: x - y + z - 1 = 0$

59. Determina la ecuación general del plano que contiene al punto $P(2, -4, 2)$ y es perpendicular a la recta r: $(\lambda, \lambda, \lambda)$.

$\pi: x + y + z = 0$

60. Determina la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen de coordenadas es el punto $P(1, 3, 2)$.

$x + 3y + 2z - 14 = 0$

61. Determina la ecuación general del plano que contiene al punto $P(-1, -1, 1)$, tiene la dirección del vector $\vec{v} = (1, 0, -2)$ y es paralelo a la recta de ecuación s: $\frac{x+5}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z}{4}$. $\quad 2x - 2y + z - 1 = 0$

62. Determina los puntos de corte de estos planos con los ejes de coordenadas.

a) $\pi: 2x - 3y + 4z - 12 = 0$ $\quad (6, 0, 0)\ (0, -4, 0)\ (0, 0, 3)$

b) $\pi: 2x - z + 6 = 0$ $\quad (-3, 0, 0)$, NO, $(0, 0, 6)$

63. Sabemos que el plano $\pi = Ax + By + Cz - 8 = 0$ corta a los ejes de coordenadas en los puntos $P(4, 0, 0)$, $Q(0, -2, 0)$ y $R(0, 0, 1)$. Determina la ecuación del plano π.

$2x - 4y + 8z - 8 = 0$

64. Calcula el valor de m en cada caso para que el punto $A(2, -1, m)$ pertenezca a estas rectas.

a) r: $\left.\begin{array}{l} x = \lambda - 2 \\ y = \lambda + 1 \\ z = 3\lambda + 2 \end{array}\right\}$ $\quad \nexists$

b) s: $\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{array}\right\}$ $\quad m = -1$

65. Determina si están alineados los puntos $A(1, -1, 0)$, $B(2, -2, 1)$ y $C(0, 0, -1)$. Sí

66. Calcula el valor de a para que los puntos $A(4, -2, 1)$, $B(2, 2, -1)$ y $C(-1, a, -4)$ estén alineados. $a = 8$

67. Encuentra los valores de a y b que hacen que los tres puntos estén alineados: $P(2, -1, a)$, $Q(5, 1, 6)$ y $R(b, -5, 9)$.

$a = 7, \ b = -4$

68. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(3, 1, 0)$, $B(4, 5, 2)$ y $C(4, 7, -2)$.

a) Halla el cuarto vértice del paralelogramo. $D(3, 3, -4)$

b) Calcula su perímetro. $2\sqrt{21} + 4\sqrt{5}$

69. Demuestra si son o no coplanarios los puntos $A(3, -1, 2)$, $B(2, 5, 1)$, $C(-1, 0, 3)$ y $D(0, 1, -3)$. NO

70. Calcula el valor de a para que los puntos $A(0, 0, 6)$, $B(1, -1, 7)$, $C(-2, 3, -5)$ y $D(-3, -1, a)$ sean coplanarios. $a = 39$

71. Considera los puntos del espacio: $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 2)$ y $C(0, -1, -1)$.

a) Encuentra la ecuación del plano ABC. $-x + 2y - z + 1 = 0$

b) Si D es el punto de coordenadas $(k, 0, 0)$, ¿cuánto ha de valer k para que los cuatro puntos A, B, C y D sean coplanarios? $k = 1$

72. Sean los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(a, 2, b)$ y $C(1, 0, 0)$.

a) Con $a = 2$, calcula b para que los tres puntos determinen un plano que pase por el punto $P(2, 0, 1)$. ¿Cuál es la ecuación de dicho plano? $x + y - z - 1 = 0$

b) Calcula los valores de a y b para que los puntos A, B y C estén alineados.

$a = 1$
$b = 2$

73. Sean A y B los puntos del espacio de coordenadas $A(0, 1, 2)$ y $B(1, 2, 3)$. Encuentra la ecuación paramétrica de la recta que pasa por dichos puntos.

¿Existen valores de r y s para los cuales el punto C de coordenadas $C(3, r+s, r-s)$ pertenezca a la recta calculada antes? En caso afirmativo, calcula los valores de r y s. Razona la contestación en caso negativo.

r = 9/2 , s = −1/2

Posiciones relativas

74. Estudia las posiciones relativas de las parejas de rectas siguientes.

a) $r: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+2}{3} = z-3$ Se cortan

$s: x-2 = \dfrac{y+4}{-1} = \dfrac{z-4}{-2}$

b) $r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = z+4$ ||

$s: \dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$

c) $r: \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$

$s: \left.\begin{matrix} 3x+z=10 \\ 5x-y-z=16 \end{matrix}\right\}$ Sec

d) $r: \left.\begin{matrix} 2x+z=4 \\ x+3y+z=4 \end{matrix}\right\}$

$s: \left.\begin{matrix} x+y-z=8 \\ 3x-y+3z=18 \end{matrix}\right\}$ Cruzan

e) $r: \left.\begin{matrix} 2x+4y-z=7 \\ -x+y+2z=-2 \end{matrix}\right\}$ Coinc

$s: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$

75. Di si las dos rectas son o no paralelas.

$$r: \left.\begin{matrix} x+2y-z=13 \\ 2x-y-7z=16 \end{matrix}\right\} \qquad s: \left.\begin{matrix} x=1-3\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-\lambda \end{matrix}\right\}$$ Si

En caso afirmativo, determina la ecuación del plano que las contiene. π: −y−z+2=0

76. Decide si estas dos rectas se cortan y, en caso afirmativo, determina el punto de corte.

$$r: \left.\begin{matrix} x=-4+7\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-1 \end{matrix}\right\} \qquad s: \left.\begin{matrix} x=1-\mu \\ y=10+4\mu \\ z=3+2\mu \end{matrix}\right\}$$ Si (3,2,−1)

77. Decide si las dos rectas se cortan, y en caso de que sea así, calcula el plano que las contiene.

$$r: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-1} \qquad s: \left.\begin{matrix} x=3-2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-\lambda \end{matrix}\right\}$$

SEC

π: −x+4y+6z−1=0.

78. Decide las posiciones relativas de las siguientes parejas formadas por una recta y un plano.

a) $r: \left.\begin{matrix} x=3-\lambda \\ y=2 \\ z=-1+3\lambda \end{matrix}\right\} \quad \pi: 2x-3y+z-2=0$ Se cortan

b) $r: \left.\begin{matrix} 2x+y-3z+3=0 \\ 5x+5y-7z+1=0 \end{matrix}\right\} \quad \pi: x+3y-z-5=0$ Contenida

c) $r: \left.\begin{matrix} -4x+y-2z+3=0 \\ 2x+4y+z+4=0 \end{matrix}\right\} \quad \pi: \left.\begin{matrix} x=-1-\lambda+\mu \\ y=2+2\lambda-\mu \\ z=3-\mu \end{matrix}\right\}$ ||

79. Estudia las posiciones relativas de las parejas de planos.

a) $\pi: \begin{cases} x=2+2\lambda+\mu \\ y=-1+2\lambda-3\mu \\ z=1+5\mu \end{cases}$ ||

$\pi': -5x+5y+4z-12=0$

b) $\pi: x-2y+4z-1=0$ Sec

$\pi': 2x+5y-3z+2=0$

c) $\pi: \left.\begin{matrix} x=-\lambda-\mu \\ y=3+2\lambda+3\mu \\ z=1+3\lambda+4\mu \end{matrix}\right\}$ Coinc

$\pi': x-y+z+2=0$

80. Estudia las posiciones relativas de estos tríos de planos.

a) $\pi: 4x+y+3z+2=0$
$\pi': -3x+5y+4z-7=0$ Sec punto
$\pi'': y+3z-6=0$

b) $\pi: x-2y+3z-1=0$
$\pi': 2x+y-z+5=0$ Sec recta
$\pi'': 7x-4y+7z+7=0$

c) $\pi: 6x-3y+9z-1=0$
$\pi': -x+2y-z+1=0$ 2 || cortan al 3º
$\pi'': 4x-2y+6z+5=0$

d) $\pi: 2x-3y+z=0$
$\pi': 2x-y+4z+5=0$ Se cortan 2 a 2
$\pi'': 6x-5y+9z-1=0$

81. Calcula el valor que debe tomar m para que las siguientes rectas se corten en un punto.

$$r: \dfrac{x-m}{-1} = \dfrac{y+10}{4} = \dfrac{z+3}{1}$$

$$s: \left.\begin{matrix} x=1 \\ y=6+4\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{matrix}\right\}$$ m = 7

82. Estudia la posición relativa entre las rectas

$$r: \left.\begin{matrix} x+y+z+3=0 \\ x-y-z-1=0 \end{matrix}\right\} \text{ y } s: \dfrac{x+1}{2} = y+1 = \dfrac{z+m}{-2}$$

en función del parámetro m. Determina el punto de intersección en los casos en que r y s sean secantes.

Cruzan m ≠ 1

Sec m = 1 (−1, −1, −1)

83. Considera la recta r: $\left.\begin{matrix} x+y=2 \\ y+2=0 \end{matrix}\right\}$ y la recta s que pasa por los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(1, 0, -1)$.

a) Estudia la posición relativa entre ambas rectas. Se cruzan

b) Determina un punto C de la recta r tal que los segmentos CA y CB sean perpendiculares. $(1, 1, -1)$

84. Determina el valor que debe tomar m para que las rectas r: $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{m^2} = \frac{z-m}{-4}$ y s: $\left.\begin{matrix} x=t+2 \\ y=t \\ z=1-t \end{matrix}\right\}$ sean paralelas. En ese caso, determina la ecuación del plano que las contiene. $m=-2$ $\pi: x-y-2=0$

85. Determina, en función del parámetro m, la posición relativa entre las rectas r: $\left.\begin{matrix} x+z-1=0 \\ 2x+y+z+1=0 \end{matrix}\right\}$ y s: $-x = y = \frac{z+1}{m}$. $m=1$ $\parallel$ $m\neq 1$ sec

86. Determina el valor de m para que las rectas r: $\frac{x}{2} = \frac{y}{m} = \frac{z}{-3}$ y s: $x = y = z$ sean secantes y perpendiculares. Determina en ese caso la ecuación de la recta secante perpendicular común a ambas. $m=1$

$t: (0,0,0)+\lambda(4,-5,1)$

87. Determina la posición relativa entre la recta r: $\left.\begin{matrix} x+y-1=0 \\ x+z+1=0 \end{matrix}\right\}$ y el plano π: $x + my - z - 6 = 0$ en función del parámetro m. $m\neq 2$ sec pto $m=2$ $\parallel$

88. Dados la recta r: $\left.\begin{matrix} x=y \\ y=x \end{matrix}\right\}$ y el plano π: $2x + 3y - az = 0$, estudia la posición relativa entre la recta y el plano en función del valor del parámetro a. Halla, cuando sea posible, las coordenadas del punto de intersección. $a=5$ Contenida $a\neq 5$ sec pto

89. Considera el plano π: $ax + 2y - 4z - b = 0$ y la recta r: $\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$. Estudia, en función de los valores de a y b, la posición relativa entre la recta y el plano. $a\neq 3$ sec punto $a=3$ $b=23$ Cont $b\neq 23$ $\parallel$

90. El plano π: $2x - y + mz - 4 = 0$ y la recta r: $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{2}$ son paralelos. Determina la ecuación del plano perpendicular al dado y que contenga a la recta. $2x-10y+7z-29=0$

91. Considera el plano de ecuación π: $2x + 3y + z + 1 = 0$ y la recta de ecuación r: $\frac{-x}{2} = \frac{y}{-3} = -z$. ¿Son ortogonales? Razona la respuesta. Sí

92. Sean dos planos de ecuaciones π_1: $ax + 9y - 3z - 8 = 0$ y π_2: $x + ay - z = 0$. Determina el valor de a para que:

$\vec{n_1}=\lambda\vec{n_2}$ a) Los planos sean paralelos. $a=3$

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$ b) Los planos sean perpendiculares. $a=-3/10$

93. Estudia en función del parámetro k la posición relativa de los tres planos en cada caso.

a) π_1: $x + y + z - 3 = 0$
π_2: $x + 2y + 3 = 0$
π_3: $x + 4y + kz + 15 = 0$

$k=-2$ Sec
$k\neq -2$ Sec.

b) π_1: $2x - ky + 4z = 0$
π_2: $x + y + 7z = 0$
π_3: $kx - y + 13z = 0$

94. Considera los planos π_1: $x - y = a$, π_2: $x + a^2z = 2a + 1$ y π_3: $x - y + (a^2 - a)z = 2a$.

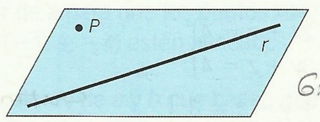
a) Estudia, en función del parámetro a, la posición relativa de los tres planos.

b) Si existe el caso en el que los tres planos son secantes en un punto o en una recta, encuentra el lugar geométrico expresándolo con detalle.

Problemas de geometría en el espacio

95. Determina la ecuación del plano que contiene a los puntos $A(0, 1, 1)$ y $B(1, 0, 1)$ y es paralelo a la recta de ecuación r: $(-3 + \lambda, 0, 1 + 2\lambda)$. $2x+2y-z-1=0$

96. Determina la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuación r: $\left.\begin{matrix} 2x+y-z=4 \\ x+y-2z=3 \end{matrix}\right\}$ y al punto $P(-2, 2, -2)$.



$6x+5y-9z-16=0$

97. Determina la ecuación del plano perpendicular a la recta de ecuación r: $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-3}$ y que contiene al punto $A(-3, 1, 0)$. $3x+2y-3z+7=0$

98. Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano de ecuación π: $-x + 3y - 5z + 2 = 0$ y que pasa por el punto $A(0, -1, 5)$. $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{-5}$

99. Dados la recta r: $\left.\begin{matrix} x=\lambda \\ y=\lambda-1 \\ z=2\lambda+1 \end{matrix}\right\}$ y el plano π: $7x - 2y + 6z + 9 = 0$, determina el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π. $10x+8y-9z+17=0$

100. Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta r: $\frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{-1}$ y es paralelo a la recta s: $\left.\begin{matrix} x+2y-z+4=0 \\ 2x-3y+2z+4=0 \end{matrix}\right\}$. $6x+5y-2z+5=0$

101. Considera las rectas r: $\left.\begin{matrix} x-2y=0 \\ y-2z+4=0 \end{matrix}\right\}$ y s: $\left.\begin{matrix} x=2+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}$. Calcula la ecuación de un plano que contiene al punto $P(1, 1, 1)$ y es paralelo a ambas rectas.

$x-y-2z+2=0$

102. Dadas las rectas

$$r_1: x = y = z \quad \left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right)$$

$$r_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} \quad (0, -3/2, -1)$$

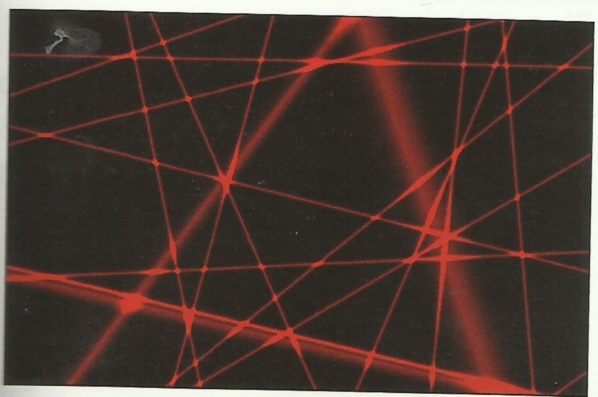
$$r_3: -x + 2 = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3} \quad (23/8, -3/4, -21/8)$$

Determina los tres puntos de corte de estas rectas con el plano $\pi: 5x - 4y + 7z + 1 = 0$.

103. Dados la recta r: $(1, 1 + \lambda, 3 + 2\lambda)$ y los puntos $A(2, 1, 1)$ y $B(-3, 4, 3)$, determina el punto o los puntos P de la recta r para los que APB es un triángulo rectángulo de hipotenusa AB. $(1, 0, 1)$ $(1, 9/5, 23/5)$

104. Consideremos la recta $r: 2x - 2 = y + 2 = \dfrac{z+1}{4}$ y el punto $P(3, 5, -1)$. Halla un punto Q perteneciente a la recta r tal que la recta que pasa por los puntos P y Q sea paralela al plano $\pi: 3x - 2y + z + 13 = 0$. $(-1/7, -30/7, -7/7)$

105. Demuestra que las rectas r: $(2t - 1, 1 - t, -t)$ y $s: \dfrac{x+5}{-1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-2}{m}$ son secantes para cualquier valor del parámetro m. Después, determina la recta perpendicular común a ambas y el plano que las contiene.



106. Dados la siguiente recta y plano:

$$r: \left.\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + 3t \\ z &= 5 \end{aligned}\right\} \qquad \pi: 3x + y - 2z + 8 = 0,$$

determina:

a) La posición relativa de la recta con el plano. ||

b) La ecuación de la recta paralela a $s: \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z-1}{3}$ que corta al plano π en el punto P correspondiente a $x = 1$ e $y = 5$. $s: (1, 5, 8) + \lambda(2, 1, 3)$

107. Considera la ecuación del plano $\pi: 2x + y - z + 2 = 0$ y de la recta r: $(5 - 2t, t, 6 + mt)$. Determina:

a) La posición relativa entre la recta y el plano en función del parámetro m. $m \neq -3$ sec $m = -3$ ||

b) Para $m = -3$, la ecuación del plano que contiene a la recta y es perpendicular al plano. $x - 4y - 2z + 7 = 0$

c) Para $m = -3$, la ecuación del plano que es paralelo al plano y contiene a la recta. $2x + y - z - 4 = 0$

108. Justifica que las rectas de ecuaciones $r: \left.\begin{aligned} x + y - z &= 5 \\ 2x + y - 2z &= 2 \end{aligned}\right\}$ y $s: \left.\begin{aligned} x &= 3 + 2\lambda \\ y &= 10 + 2\lambda \\ z &= 5 + \lambda \end{aligned}\right\}$ son secantes en un punto. Determina:

a) El punto de intersección entre ambas rectas.

b) La ecuación general de la recta que es secante y perpendicular a ambas rectas.

c) La ecuación del plano paralelo a ambas rectas y que contiene al punto $A(3, 2, 1)$.

109. Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$$

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z+5}{3}$$

y el punto $P(1, 1, -1)$, buscamos la ecuación de la recta que pasa por P y que corta a r y a s. Para conseguirlo:

a) Encuentra la ecuación general o cartesiana (es decir, la ecuación de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del plano π que contiene a la recta r y al punto P. $y + 2z + 1 = 0$

b) Halla el punto M calculando el punto de intersección del plano π con la recta s. $(3, -3, 1)$

c) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y M. $\left.\begin{aligned} 2x + y - 3 &= 0 \\ x - z - 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$

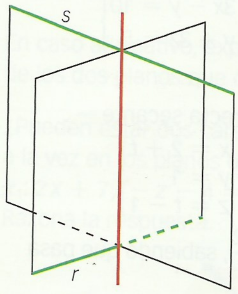
d) Comprueba que la recta encontrada en el apartado anterior es la que buscamos. SEC

110. Considera el punto $P(3, -1, 1)$ y la recta de ecuación $r: \dfrac{x+2}{3} = -y = \dfrac{1-z}{2}$. Determina:

a) La ecuación del plano que contiene al punto y a la recta. $x + 5y - z + 3 = 0$

b) La ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y contiene al punto P. $x + 5y - z + 3 = 0$ / $3x - y - 2z - 8 = 0$

111. Determina la recta perpendicular que corta a las rectas r y s en cada uno de los casos.



a) $r: \left.\begin{aligned} x &= 2 - \lambda \\ y &= 3\lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\}$

$s: \dfrac{x-1}{3} = y - 3 = \dfrac{z+1}{2}$

b) $r: \left.\begin{aligned} 2x - y + 2z &= 3 \\ x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$

$s: x = y = z$

c) $r: \left.\begin{aligned} 3x - 5y + z &= 3 \\ 2x - y - z - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$

$s: \left.\begin{aligned} x + 2y - 3 &= 0 \\ y - 2z &= 4 \end{aligned}\right\}$

112. Considera las rectas r: $(4 + 2\lambda, 2 - \lambda, 1 + \lambda)$ y s: $(4 + t, 2 + 3t, m - 2t)$.

a) Determina la posición relativa de r y s en función del parámetro m. Se cruzan

b) Calcula la perpendicular común a r y a s para $m = 1$.

$(4, 2, 1) + \lambda(-1, 5, 7)$

113. Considera las rectas de ecuaciones:

$$r: \left.\begin{array}{r} x+y+2z+1=0 \\ x-y+3=0 \end{array}\right\} \text{ y } s: \left.\begin{array}{l} x=m+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-1+3\lambda \end{array}\right\}.$$

a) Estudia la posición relativa de las rectas en función de m.

b) Para $m=0$, encuentra la ecuación de la recta perpendicular común a ambas rectas.

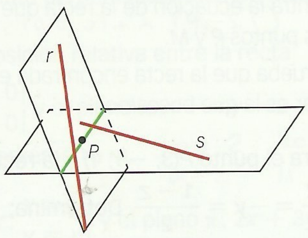
114. Considera las rectas de ecuaciones $r: \left.\begin{array}{r} x=1 \\ z-y=1 \end{array}\right\}$ y $s: \left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=a \\ z=1+\lambda \end{array}\right\}$.

a) Estudia, en función del parámetro a, la posición relativa entre las rectas r y s.

b) Para $a=1$, determina la ecuación de la recta secante perpendicular común a r y s.

c) Para $a=0$, determina la ecuación de la recta secante perpendicular común a r y s.

115. Observa la ilustración y determina, en cada uno de los casos, la ecuación de la recta secante a las rectas r y s que pasa por el punto P.



a) $r: (1+\lambda, \lambda, -\lambda)$ $\qquad s: \dfrac{x-2}{2}=y=\dfrac{z}{-3}$

$P(0, 1, 0)$

b) $r: \left.\begin{array}{r} -x+2z=2 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$ $\qquad s: x-3=-y=\dfrac{z-1}{-2}$

$P(0, 0, 1)$

c) $r: (-2\lambda, 1, 2)$ $\qquad s: \left.\begin{array}{r} 3x-y=10 \\ y+3z=5 \end{array}\right\}$

$P(1, 0, 0)$

116. Determina la ecuación de la recta secante a las rectas de ecuaciones $r: \left.\begin{array}{l} x=2+t \\ y=1 \\ z=t-1 \end{array}\right\}$ y $s: \dfrac{x-2}{2}=y-5=\dfrac{z-2}{1}$, sabiendo que pasa por el punto $A(0, 0, 1)$.

117. Dadas las rectas de ecuaciones $r: \left.\begin{array}{l} x=3-\lambda \\ y=m+\lambda \\ z=2+2\lambda \end{array}\right\}$ y $s: x-1=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$, calcula los valores de m para los que las rectas son coplanarias. ¿Cuál es la posición relativa de r y s para ese valor de m?

118. Determina los extremos de un segmento AB sabiendo que el punto A pertenece al plano $2x+y+z=0$, el punto B pertenece a la recta $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{3}$ y el punto medio del segmento es $(0, 0, 0)$.

X **119.** Justifica que los planos $\pi_1: 2x-y+3z-5=0$ y $\pi_2: 5x-y+6z=3$ son secantes en una recta. Determina la ecuación paramétrica de esa recta.

120. Justifica que los planos de ecuaciones $\pi_1: x-2z-5=0$ y $\pi_2: -y+4z+4=0$ son secantes en una recta que pasa por el punto $P(3, 0, -1)$. Determina la ecuación paramétrica de esa recta.

121. Se consideran la recta $r: (x, y, z)=(t+1, 2t, 3t)$, el plano $\pi: x-2y-z=0$ y el punto $P(1, 1, 1)$. Se pide:

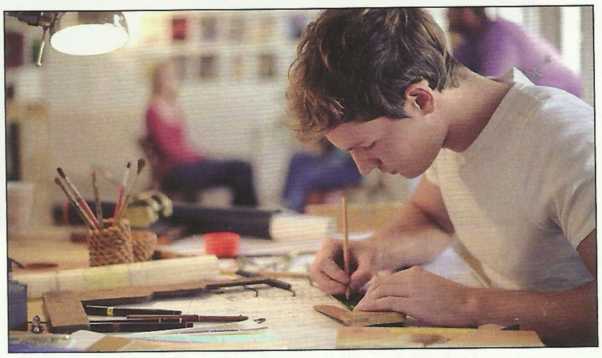
a) Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto P y es paralelo al plano π.

b) Determinar la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por el punto P.

c) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de los planos anteriores, π_1 y π_2.

122. Estudia la posición relativa de los siguientes planos según el valor del parámetro a:

$$\pi_1: \left.\begin{array}{l} x=3-\lambda+2\mu \\ y=\lambda-\mu \\ z=1+2\mu \end{array}\right\} \qquad \pi_2: 4x+ay-2z-5=0$$



X **123.** Determina el punto de intersección de la recta $r: \dfrac{x-2}{2}=y=z$ con el plano paralelo a $\pi: -2x+y-z-3=0$ que contiene al punto $A(1, 1, 1)$.

$(1, -1/2, -1/2)$

124. Determina la ecuación del plano paralelo a la recta de ecuación $r: \left.\begin{array}{r} x+y-2z=3 \\ x-y+3z=-1 \end{array}\right\}$ que contiene a la recta de ecuación $s: \dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{2-y}{2}=z$.

$9x-5y+17z+28=$

125. Estudia la posición relativa de los planos:

$$\pi_1: 3x-my-2z-(m-1)=0$$
$$\pi_2: x+3y-(m-1)z=0$$
$$\pi_3: 2x-5y+3z-1=0$$

según los distintos valores del parámetro m.

$m=2$ Secantes en una recta. $rg\,M = rg\,M^* = 2$

$m=5$ $2 = rg\,M \neq rg\,M^* = 3$ Se cortan 2 a 2

$m \neq 2, 5$ Se cortan en un punto

126. Determina las condiciones que deben cumplir a y b para que los planos de ecuaciones π_1: $ax + z - 1 = 0$, π_2: $x + bz + 2 = 0$ y π_3: $\sqrt{5}x + 3y + 2z - 3 = 0$, se corten en un punto. Determina las coordenadas de ese punto.

127. Determina a y b para que los planos α: $x + 2y - z - 1 = 0$, β: $2x + y + az = 0$ y χ: $3x + 3y - 2z = b$ sean del mismo haz de planos.

128. Dados la recta r: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{3} = z$, el plano π: $x - y + 2z + 1 = 0$ y el punto $P(2, 1, -5)$, determina:

a) La posición relativa entre la recta r y el plano π. Si existe, determina el punto de intersección.

b) La ecuación del plano que contiene a la recta r y al punto P.

129. Dados el plano π: $5x - 4y + z = 0$ y la recta r: $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$, obtén la ecuación de la recta s contenida en π, que es perpendicular a r y que pasa por el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$.

$x=y$
$x=-z$

130. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, 1, 1)$, es paralela al plano π: $x - y + z - 3 = 0$ y corta a la recta r: $\left.\begin{array}{r} x = 1 \\ y = 3 \end{array}\right\}$.

131. Considera las rectas:

$$r: \left.\begin{array}{l} x = m - 2\lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 2x + z = 1 \end{array}\right\}$$

a) Estudia, en función del parámetro m, la posición relativa entre las rectas r y s.

b) Para $m = \dfrac{3}{4}$, determina la ecuación de la recta secante perpendicular común a ambas rectas.

c) Para $m = -1$, determina la ecuación de la recta secante perpendicular común a las rectas r y s.

132. Determina las ecuaciones paramétricas de la recta que:

- Pasa por el punto de intersección del plano π: $x + y - z + 6 = 0$ con la recta r: $\left.\begin{array}{r} 3y - x = 6 \\ y - z = 3 \end{array}\right\}$
- Es paralela a la recta s: $(1 + 2\lambda, 1 - 6\lambda, -26\lambda)$.

133. Considera el plano π: $x + y - 4z + 7 = 0$, la recta r: $\left.\begin{array}{r} x = 2 \\ z = 3 \end{array}\right\}$ y el punto $P(3, -2, 1)$.

a) Determina la posición relativa entre la recta y el plano. Determina, si existe, su punto de intersección.

b) Determina la ecuación del plano que contiene al punto y a la recta.

c) Halla un punto Q de la recta de modo que la recta que pasa por P y Q sea paralela al plano.

134. Sean el punto $A(1, 2, 1)$ y la recta r: $x + 1 = y - 2 = \dfrac{z-3}{4}$.

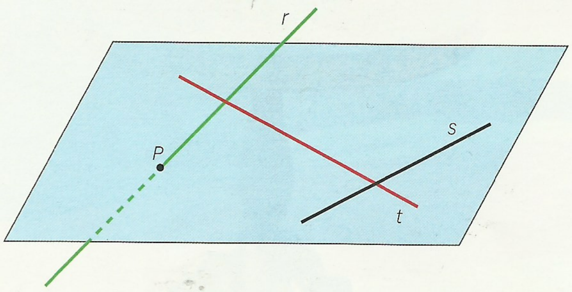
a) Determina la ecuación de la recta s que pasa por A y corta perpendicularmente a la recta r.

b) Determina la ecuación paramétrica de una recta que corte a r y s.

135. Determina la ecuación de la recta que corta a las rectas de ecuaciones r_1: $\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ z = 1 \end{array}\right\}$ y r_2: $(2\lambda - 3, 1, \lambda)$, y que es paralela a la recta r_3: $x = -y = z$.

136. Halla la ecuación general de una recta que pase por el punto $P(1, -1, 2)$, sea paralela al plano de ecuación π: $x - 3y + 2z - 1 = 0$ y sea secante a la recta r: $\left.\begin{array}{r} z - x = 1 \\ y = 2 \end{array}\right\}$. Determina el punto en el que se intersecan ambas rectas.

137. Halla las coordenadas de un punto P que pertenece a la recta r: $\left.\begin{array}{r} x - z = 0 \\ y + z = -1 \end{array}\right\}$ y que determina con la recta s: $\left.\begin{array}{r} 2x + z = -2 \\ x + y = 0 \end{array}\right\}$ un plano que contiene a la recta t: $\left.\begin{array}{r} x = -2 \\ y - z = 0 \end{array}\right\}$.



138. Decide si el plano $6x - 4y + z - 1 = 0$ pertenece al haz de planos definido por la recta $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z - 3 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{array}\right\}$.

En caso afirmativo, exprésalo como combinación lineal de los dos planos que definen la recta.

139. ¿Pueden estar dos caras de un cubo de Rubik apoyadas a la vez en los planos de ecuaciones π_1: $2x + 7y - z - 4 = 0$ y π_2: $-3x + y + z - 8 = 0$? Razona la respuesta.