

Ejercicios y problemas resueltos

Funciones racionales

7. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$$

se pide:

- asíntotas.
- máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- esbozar su gráfica.

a) Asíntotas

Verticales: no tiene, porque nunca se anula el denominador.

Horizontales:

$$h = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 4} = 0 \qquad k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 4} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$

Posición de la curva respecto de la asíntota horizontal.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 4} = 0^-$$

La curva está debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 4} = 0^+$$

La curva está encima de la asíntota.

Oblicuas: no tiene, porque el grado del numerador no es uno más que el del denominador.

b) Máximos y mínimos relativos

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2}$$

$$-x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2, x = 2 \text{ raíces simples.}$$

$$x = -2 \Rightarrow y = -1/4 \Rightarrow A(-2, -1/4)$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 1/4 \Rightarrow B(2, 1/4)$$

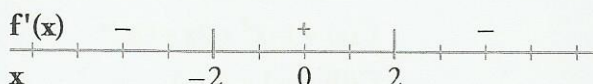
$$f''(x) = \frac{2x^3 - 24x}{(x^2 + 4)^3}$$

$$f''(-2) = 1/16 > 0 (+) \Rightarrow A(-2, -1/4), \text{ mínimo relativo.}$$

$$f''(2) = -1/16 < 0 (-) \Rightarrow B(2, 1/4), \text{ máximo relativo.}$$

Monotonía:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow \text{Si } x = 0 \Rightarrow f'(0) = 1/4 > 0 (+)$$



Creciente (\nearrow): $(-2, 2)$

Decreciente (\searrow): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

c) Gráfica

