# Ejercicios y problemas resueltos

## Funciones racionales

7. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$$

se pide:

a) asíntotas.

b) máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) esbozar su gráfica.

a) **Asíntotas**

**Verticales:** no tiene, porque nunca se anula el denominador.

**Horizontales:**

$$h = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 + 4} = 0 \qquad k = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 4} = 0$$

**La asíntota horizontal es $y = 0$**

Posición de la curva respecto de la asíntota horizontal.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 + 4} = 0^-$$

La curva está debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 4} = 0^+$$

La curva está encima de la asíntota.

**Oblicuas:** no tiene, porque el grado del numerador no es uno más que el del denominador.

b) **Máximos y mínimos relativos**

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2}$$

$-x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2,\ x = 2$ raíces simples.

$x = -2 \Rightarrow y = -1/4 \Rightarrow A(-2, -1/4)$

$x = 2 \Rightarrow y = 1/4 \Rightarrow B(2, 1/4)$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 24x}{(x^2 + 4)^3}$$

$f''(-2) = 1/16 > 0\ (+) \Rightarrow$ **$A(-2, -1/4)$, mínimo relativo.**

$f''(2) = -1/16 < 0\ (-) \Rightarrow$ **$B(2, 1/4)$, máximo relativo.**

**Monotonía:**

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow \text{Si } x = 0 \Rightarrow f'(0) = 1/4 > 0\ (+)$$

| **f'(x)** | − | | + | | − |
|---|---|---|---|---|---|
| **x** | | −2 | 0 | 2 | |

**Creciente (↗): $(-2, 2)$**

**Decreciente (↘): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$**

c) **Gráfica**