DISTRIBUCIÓN NORMAL

El consumo mensual de leche (en litros) de los alumnos de un determinado colegio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ Litros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza (16,33 ; 19,27) para estimar μ, con un nivel de confianza del 95%. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

$N\left(\bar{x}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ $\qquad$ $95\% \longrightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ Intervalo de confianza

$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 16{,}33$ $\qquad$ $2\bar{x} = 35{,}6 \Rightarrow \bar{x} = 17{,}8$

$\bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 19{,}27$ $\qquad$ $2 z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}94 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2 \cdot 1{,}96 \cdot 3}{2{,}94} \Rightarrow n = 16$

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 95%

$95\% \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$n = 64$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{3}{\sqrt{64}} = 0{,}735$

c) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 y se obtiene una media muestral de 16,3 litros. Determínese un intervalo de confianza para la media poblacional del consumo mensual de leche con un nivel de confianza del 97%

$P(z \leq z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha+1}{2} \Rightarrow P(z \leq z_{\alpha/2}) = 0{,}985 \Rightarrow 97\% \rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}17$

$\left(16{,}3 - 2{,}17 \cdot \frac{3}{\sqrt{25}}, 16{,}3 + 2{,}17 \cdot \frac{3}{\sqrt{25}}\right) = (14{,}998 ; 17{,}602)$

d) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor o igual que el 7%. con un nivel de confianza del 90%

$E = 0{,}07$ $\qquad$ $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1{,}645 \cdot 3}{0{,}07}\right)^2$

$90\% \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}645$ $\qquad$ $n = 4970{,}25 \rightarrow n = 4971$

e) Si se toma una muestra de 16 personas y la media muestral es de 17,8. Calcula el error máximo cometido para un nivel de significación del 2%.

Nivel de significación: 2% $\Rightarrow$ Nivel de confianza: 98% $\Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,33$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 2,33 \cdot \frac{3}{\sqrt{16}} = 1,75$$

d) Calcula el tamaño muestral para que la amplitud del intervalo de confianza (tamaño del intervalo, longitud del intervalo) sea de 4,82 para un nivel de confianza del 95%.

Amplitud del intervalo = 2E

$4,82 = 2E \rightarrow E = 2,41$ 95% $\rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2,41 = 1,96 \frac{3}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{1,96 \cdot 3}{2,41}\right)^2 = 5,95 \Rightarrow n = 6$$

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

• EL 4% de los CD de ordenador que fabrica una determinada empresa resultan defectuosos. Los CD se distribuyen en cajas de 5 unidades.

a) Calcula la probabilidad de que en una caja no haya ningún CD defectuoso.

$p =$ buen estado $= 0{,}96$ $\quad q =$ defectuoso $= 0{,}04$

$$P(X=5) = \binom{5}{5}(0{,}96)^5 \cdot (0{,}04)^0 = 0{,}8154$$

b) Calcula la probabilidad de que haya 3 en buen estado

$$P(X=3) = \binom{5}{3}(0{,}96)^3 (0{,}04)^2 = 0{,}0142$$

c) Calcula la probabilidad de que haya más de 3

$$P(X>3) = P(X=4) + P(X=5) = \binom{5}{4} 0{,}96^4 \cdot 0{,}04^1 + \binom{5}{5} 0{,}96^5 \cdot 0{,}04^0 =$$

$$= 0{,}1699 + 0{,}8154 = 0{,}9853$$

d) Calcula la probabilidad de que haya menos de 2 o 2

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$

$$= \binom{5}{0} 0{,}96^0 \cdot 0{,}04^5 + \binom{5}{1} 0{,}96 \cdot 0{,}04^4 + \binom{5}{2} 0{,}96^2 \cdot 0{,}04^3 = 0{,}0006$$

APROXIMACIÓN DE LA BINOMIAL POR UNA NORMAL

Se suele hacer cuando el número de experimentos es grande

$$B(n, p) \longrightarrow N(np, \sqrt{npq})$$

Se produce un error y para calcular $P(x \leq a) = P(x' \leq a - 0{,}5)$

- Se sabe que el 10% de habitantes de una ciudad va regularmente al teatro. Se toma una muestra al azar de 100 habitantes de esta ciudad. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que al menos el 13% de ellos vayan regularmente al teatro?

$n = 100$ $\quad B(100\,;\,0{,}1) \rightarrow N(100 \cdot 0{,}1\,;\,\sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}) = N(10, 3)$

$p = 0{,}1$

$$P(X \geq 13) = P(x' \geq 12{,}5) = P(Z \geq 0{,}83) = 1 - P(Z \leq 0{,}83) = 1 - 0{,}7967 =$$

Tipificar $z = \dfrac{12{,}5 - 10}{3} = 0{,}83$

$= 0{,}2033$

PROPORCIONES

En el día del estreno de una película se ha tomado una muestra al azar de 450 personas a la salida de los cines y 125 de ellas afirmaron que salían de ver esa película. Halla un intervalo de confianza para el porcentaje de personas que vieron la película con un nivel de confianza del 90%.

$90\% \longrightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$p = \frac{125}{450} = \frac{5}{18} = 0{,}28 \quad q = \frac{13}{18} = 0{,}72$

$$\left(0{,}28 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}28 \cdot 0{,}72}{450}} \; ; \; 0{,}28 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}28 \cdot 0{,}72}{450}}\right) =$$

$$= (0{,}2452 \; ; \; 0{,}3148)$$

De una muestra de 300 bombillas fabricadas por una empresa, 24 han resultado defectuosas. Al determinar el intervalo de confianza para la proporción de bombillas defectuosas de la población con un nivel de significación de 0,01. ¿Cuál es el error máximo admisible?

Nivel de significación 0,01 = Nivel de confianza 99 % $\rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}575$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2{,}575 \sqrt{\frac{0{,}08 \cdot 0{,}92}{300}} = 0{,}04$$

$p = \frac{24}{300} = 0{,}08 \quad q = \frac{276}{300} = 0{,}92$

Se ha tomado una muestra de 300 bombillas fabricadas por una empresa y se han obtenido 24 defectuosas. Se desea estimar el número de bombillas defectuosas con un error máximo del 2% y un nivel de confianza del 99%. ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

$p = \frac{24}{300} = 0{,}08 \qquad q = \frac{276}{300} = 0{,}92$

$$0{,}02 = 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}08 \cdot 0{,}92}{n}} \Rightarrow n = \frac{2{,}575^2 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92}{0{,}02^2} = 1220{,}035$$

$n = 1221$

Un estudio de un fabricante de televisores indica que la duración media de un televisor es de 10 años, con una desviación típica de 0,7 años. Suponiendo que la duración de los televisores sigue una distribución normal.

$\mu = 10$, $\sigma = 0{,}7$ $\quad N(10; 0{,}7)$

a). Calcula la probabilidad de que un televisor dure más de 9 años.

$$P(X \geq 9) \underset{\text{Tipificar}}{\overset{}{=}} P(Z \geq -1{,}43) = P(Z \leq 1{,}43) = 0{,}9236$$

$$z = \frac{9-10}{0{,}7} = -1{,}43$$

b) Calcula la probabilidad de que dure entre 8 y 11.

$$P(8 \leq X \leq 11) = P(X \leq 11) - P(X \leq 8) \underset{\text{Tipificar}}{=} P(Z \leq 1{,}43) - P(Z \leq -2{,}86) =$$

$$z = \frac{11-10}{0{,}7} = 1{,}43 \quad z = \frac{8-10}{0{,}7} = -2{,}86$$

$$= P(Z \leq 1{,}43) - [1 - P(Z \leq 2{,}86)] = 0{,}9236 - [1 - 0{,}9979] = 0{,}9215$$

c) Calcula la probabilidad de que dure menos de 8,5

$$P(X \leq 8{,}5) = P(Z \leq -2{,}14) = P(Z \geq 2{,}14) = 1 - P(Z \leq 2{,}14) = 1 - 0{,}9838 =$$
$$= 0{,}0162$$

$$z = \frac{8{,}5-10}{0{,}7} = -2{,}14$$