Ejercicios y problemas propuestos

1 Sistemas de ecuaciones lineales

19 Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y clasifícalos:

a) $\left.\begin{aligned} 5x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + 2y + z &= 3 \\ x - 2y + 2z &= -3 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} x \quad + z &= 3 \\ x + y \quad &= 3 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$

20 Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y clasifícalos:

a) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x - y + 2z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} 3x + y + z &= 6 \\ x + 3y + z &= -10 \\ x + y + 3z &= 4 \end{aligned}\right\}$

21 Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 2 \\ 5x - y + z &= 6 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 9 \\ 2x - y + 2z &= -2 \\ x + y + 2z &= 8 \end{aligned}\right\}$

2 Estudio de los sistemas

22 Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ x \quad + z &= -2 \\ x - y \quad &= 1 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} -x + y - 3z &= -2 \\ 4x + 2y - z &= 5 \\ 2x + 4y - 7z &= 1 \end{aligned}\right\}$

23 Discute el siguiente sistema y clasifícalo para el valor $a = 0$:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= a \\ x + y - az &= a \\ 2x + 3y + z &= a \end{aligned}\right\}$$

24 Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 0 \\ 4x + y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} x \quad - z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$

25 Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{aligned} 2x + 2y - 2z &= 1 \\ 2x + y - 2z &= 1 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 2y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$

26 Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x - y + 3z &= 4 \\ x + 4y - 6z &= 0 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 1 \\ 4x + 6y - z &= 2 \\ x + y + z &= 10 \end{aligned}\right\}$

27 Discute el siguiente sistema y clasifícalo para los valores:

a) $\lambda = -1$

b) $\lambda = 2$

$$\left.\begin{aligned} x - y + \lambda z &= 2 \\ \lambda x + \lambda y - z &= 5 \\ (\lambda + 1)x + \lambda y - z &= \lambda \end{aligned}\right\}$$

28 Discute el siguiente sistema y clasifícalo para los valores:

a) $a = 1$

b) $a = 2$

$$\left.\begin{aligned} x \qquad\quad + \qquad z &= 1 \\ y + (a-1)z &= 0 \\ x + (a-1)y + \quad az &= a \end{aligned}\right\}$$

3 Interpretación gráfica

29 Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + y &= 6 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} -x + y &= 4 \\ x - y &= -2 \end{aligned}\right\}$

30 Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 8x + 4y &= 12 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ x - y &= -3 \end{aligned}\right\}$

31 Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x - y + z &= 2 \\ x - y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

32 Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 3 \\ x + y - z &= 2 \\ x - 2z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

33 Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1 \\ x + 2y - z &= -3 \\ x + 7y - 6z &= -10 \end{aligned}\right\}$$

34 Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x + y - z &= 3 \\ 2x + 2y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

35 Resuelve por el método de Gauss, clasifica e interpreta gráficamente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 0 \\ 4y + z &= 0 \\ 3x + 2y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

4 Resolución de problemas

36 Sonia ha comprado unos bolígrafos de 2 €, unos cuadernos de 1 € y unas cajas de 3 €. Entre bolígrafos y cuadernos hay el triple que cajas. Considerando que ha comprado 12 objetos y ha pagado 22 €, calcula el número de bolígrafos, cuadernos y cajas que ha comprado.

37 Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento; que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento; y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

38 Una persona invierte 7 000 € en acciones de las empresas A y B y en un depósito a 12 meses al 1 %. Pasado un año, vende sus acciones, obteniendo una rentabilidad del 5 % en las acciones de la empresa A y un 3 % en las de B. El beneficio total de sus tres inversiones es de 202 €. Determina qué cantidad destinó a cada inversión si se sabe que el dinero total dedicado a comprar acciones superó en 2 600 € al dinero del depósito.

39 Un tren transporta 470 viajeros, y la recaudación del importe de sus billetes asciende a 4 250 €. Calcula cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que asciende a 10 €, cuántos han pagado el 80 % del billete y cuántos han pagado el 50 %, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 50 % es la mitad del número de viajeros que pagaron el 80 %

Para ampliar

40 Resuelve y clasifica los siguientes sistemas:

a) $$\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= -1 \\ x - 2y + 2z &= 2 \\ 3x - y + 2z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ -2x + y &= -4 \\ x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

41 Resuelve y clasifica los siguientes sistemas:

a) $$\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 6 \\ x + y + 2z &= 4 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ 2x + y - 3z &= 1 \\ 8x - 5y + 3z &= 19 \end{aligned}\right\}$$

42 Resuelve y clasifica el siguiente sistema para el valor de $m = 3$

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ x + y + 2z &= 5 \\ -x + (m+2)z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

43 Resuelve y clasifica el sistema para los siguientes valores de a:

a) $a = -1$

b) $a = 2$

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 2 \\ ax + y + 2z &= 0 \\ x - y + az &= 1 \end{aligned}\right\}$$

44 Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $$\left.\begin{aligned} -3x + y + 4z &= 1 \\ -x - 3y - 2z &= 1 \\ y + z &= -3 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} x + y + 5z &= 0 \\ 2x - 3y &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

45 Discute el siguiente sistema y clasifícalo para los valores de λ:

a) $\lambda = 2$

b) $\lambda = -1$

$$\left.\begin{aligned} -x + \lambda y + 2z &= \lambda \\ 2x + \lambda y - z &= 2 \\ \lambda x - y + 2z &= \lambda \end{aligned}\right\}$$

Ejercicios y problemas propuestos

46 Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{l} x-y = 3 \\ x + 9z = 7 \\ x-y+6z = 6 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=-1 \\ x-2y+2z=1 \\ 3x-y+z=4 \end{array}\right\}$

47 Resuelve por Gauss, clasifica e interpreta gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ -y+z=0 \\ x+z=1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=6 \\ x+y=-7 \\ x+y+2z=11 \end{array}\right\}$

48 Discute el siguiente sistema y clasifícalo para los valores de λ:

a) $\lambda = 0$

b) $\lambda = 3$

$$\left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ (\lambda-1)x+y+z=\lambda \\ x+(\lambda-1)y-z=0 \end{array}\right\}$$

49 Discute el siguiente sistema y clasifícalo para $a = 2$:

$$\left.\begin{array}{r} ax+2y+6z=0 \\ 2x+ay+4z=2 \\ 2x+ay+6z=a-2 \end{array}\right\}$$

50 Discute los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{r} -x-y=0 \\ 3x+2y=0 \\ y+z=0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x-y=0 \\ 3x+4y=0 \\ y+4z=0 \end{array}\right\}$

51 Discute el siguiente sistema y clasifícalo para los valores de a:

a) $a = -1$

b) $a = 1$

$$\left.\begin{array}{r} (a+1)x+2y+z=a+3 \\ ax+y=a \\ ax+3y+z=a+2 \end{array}\right\}$$

Problemas

52 Juan compró 4 entradas de adulto y 6 de niño por 56 €, y Sara abonó 48 € por 5 entradas de adulto y 2 de niño. ¿Cuánto valen las entradas de adulto y de niño?

53 Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4 % en un cierto producto A, un 6 % en el producto B y un 5 % en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta, descontando un 8 % sobre el precio inicial de A, un 10 % sobre el precio inicial de B y un 6 % sobre el precio inicial de C.

Se sabe que si un cliente compra durante la primera oferta un producto A, dos B y tres C, se ahorra 16 € respecto del precio inicial; si compra en la segunda oferta tres productos A, uno B y cinco C, el ahorro es de 29 €; y si compra un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 €.

Calcula el precio de cada producto antes de las ofertas.

54 Un cliente ha gastado 90 € en la compra de 12 artículos entre discos, libros y carpetas en una tienda. Cada disco le ha costado 12 €; cada libro, 9 €; y cada carpeta, 3 €. Se sabe que entre discos y carpetas hay el triple que de libros. Calcula cuántos artículos ha comprado de cada tipo.

55 En una competición deportiva celebrada en un centro escolar participaron 50 atletas distribuidos, según la edad, en tres categorías: infantiles, cadetes y juveniles. El doble del número de atletas infantiles, por una parte, excede en una unidad al número de atletas cadetes y, por otra parte, coincide con el quíntuplo del número de atletas juveniles. Determina el número de atletas que hubo en cada categoría.

56 Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264 000 €. Se quiere que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares, y que el valor del dinero en libras esterlinas sea la décima parte del valor del dinero en euros. Si se supone que una libra esterlina es igual a 1,5 € y un dólar es igual a 1,1 €, ¿cuál es la cantidad de euros, dólares y libras esterlinas que la empresa ha de tener disponible?

57 Una tienda tiene tres tipos de conservas, A, B y C. El precio medio de las tres conservas es de 1 €. Un cliente compra 30 unidades de A, 20 de B y 10 de C, y abona 58 €. Otro compra 20 unidades de A, y 30 de C, y abona 51 €. Calcula el precio de cada unidad de A, B y C.

58 Una heladería prepara helados de tres tamaños; 125 g, 250 g y 500 g cuyos precios son 1 €, 2 € y 3 €, respectivamente. Un cliente compra 10 helados, con un peso total de 2,5 kg, y paga por ellos 18 €

Halla el número de helados que ha comprado de cada tipo.

59 Una editorial va a lanzar al mercado tres libros de bolsillo, L1, L2 y L3. El importe total de la edición es 24 500 €. Los costes en euros, por unidad, son 5 €, 3 € y 4 €, respectivamente. Se sabe que el número de ejemplares de L3 es igual a los dos séptimos de los del tipo L2, y que si al triple del número de ejemplares de L1 se le suma el número de ejemplares de L3, se obtiene el doble de ejemplares de L2.

Averigua cuántos libros se han editado de cada tipo.

60 En una reunión hay 60 personas entre deportistas, artistas y docentes. Se sabe que los enseñantes y los artistas duplican el número de deportistas. También se sabe que los deportistas y el doble de los artistas son el doble de los docentes.

¿Cuál es el número de personas deportistas, artistas y docentes?

61 Un padre deja a sus hijos herederos de todo su dinero, con las siguientes condiciones:

- Al mayor le deja la media de la cantidad que les deja a los otros dos más 30 000 €
- Al mediano, exactamente la media de la cantidad de los otros dos.
- Al pequeño, la media de la cantidad de los otros dos menos 30 000 €

Conociendo estas condiciones solamente, ¿pueden saber los hijos cuánto dinero ha heredado cada uno? Justifica la respuesta.

Para profundizar

62 Resuelve y clasifica el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + z = 11 \\ x + y = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 13 \end{array}\right\}$$

63 Discute el siguiente sistema y clasifícalo:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y - 2z + t = 4 \\ x + y + z - t = 5 \\ x - y - z + t = 6 \\ 6x - 3y - 3z + 2t = 32 \end{array}\right\}$$

64 Resuelve y clasifica el sistema para los siguiente valores de m:

a) $m = -3$

b) $m = 1$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = m \\ x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{array}\right\}$$

65 Un comerciante ha vendido 600 camisetas por un total de 5 320 €. El precio original era de 10 € por camiseta, pero ha vendido en las rebajas una parte de ellas con un descuento del 30 % del precio original, y otra parte con un descuento del 40 %.

Sabiendo que el número total de camisetas rebajadas fue la mitad del número de las que vendió a 10 €, calcula cuántas camisetas se vendieron a cada precio.

66 Una compañía fabricó tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás. Para la fabricación de estos tipos, se necesitó la utilización de unidades de madera, plástico y aluminio, tal y como se indica en la siguiente tabla:

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sofá	1 unidad	2 unidades	5 unidades

La compañía tenía en existencia 400 unidades de madera, 600 unidades de plástico y 1 500 unidades de aluminio.

Si la compañía utilizó todas sus existencias, ¿cuántas sillas, mecedoras y sofás fabricó?

67 Un banco invirtió 2 millones de euros en tres empresas diferentes, A, B y C. Lo que invirtió en A era el doble de lo que invirtió en B. Al cabo de un año, la rentabilidad de la operación ha sido del 10 %. Las acciones de la empresa A han aumentado su valor un 10 %, y las de B, en un 30 %.

Si las acciones de la empresa C han perdido un 10 % de su valor, ¿qué cantidad se invirtió en cada empresa?

68 En una librería hubo la semana pasada una promoción de tres libros: una novela, un libro de poesía y un cuento. Se vendieron 200 ejemplares de la novela, 100 de poesía y 150 de cuentos.

Sabiendo que la librería ingresó por dicha promoción 8 600 €, que el precio de un ejemplar de novela es el doble del precio de un cuento y que el triple de la diferencia entre el precio del ejemplar de poesía y del cuento es igual al precio de una novela, calcula el precio al que se vendió cada libro.

Ejercicios y problemas propuestos

60 Una empresa produce tres tipos de artículos, A, B y C. Los precios de coste por unidad son 30 €, 46 € y 75 €, respectivamente. Los correspondientes precios de venta de una unidad de cada artículo son 50 €, 80 € y 150 €, respectivamente. El número de unidades vendidas anualmente es de 2 000, 1 500 y 800, respectivamente.

Halla:

a) La matriz fila de costes por unidad.

b) La matriz fila de ventas por unidad.

c) La matriz fila de beneficios por unidad.

d) La matriz columna de unidades vendidas.

e) El beneficio obtenido.

61 Una fábrica produce tres tipos de productos, A, B y C, que distribuye a cuatro clientes. En el mes de enero el primer cliente compró 9 unidades de A, 5 de B y 2 de C; el segundo cliente, 3 unidades de A, 8 de B y ninguna de C; el tercer cliente no compró nada y el cuarto cliente compró 6 de A, 7 de B y 1 de C.

En el mes de febrero, el primer cliente y el segundo duplicaron el número de unidades que habían comprado en enero; el tercer cliente compró 4 unidades de cada artículo, y el cuarto cliente no hizo pedido alguno.

a) Construye la matriz correspondiente a las ventas de enero.

b) Construye la matriz correspondiente a las ventas de febrero.

c) Halla la matriz correspondiente a las ventas de enero y febrero.

d) Si los precios de los artículos son 100 €, 80 € y 90 €, respectivamente, calcula lo que factura la fábrica por sus pedidos en los meses de enero y febrero.

Problemas

62 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz $(A - 2I)^2$

63 Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula A^tA y AA^t, donde A^t denota la matriz traspuesta de A

64 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ (t indica traspuesta)

65 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

66 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

67 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

68 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y sea I la matriz identidad de orden 3 y O la matriz nula de orden 3, comprueba que:

$$A^2 - A - 2I = O$$

69 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula A^{86}

70 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

halla A^{200}

71 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcula $3AA^t - 2I$, siendo I la matriz unidad de orden 2

72 En un centro se imparten los cursos 1.°, 2.° y 3.° de ciertas enseñanzas. Los profesores tienen asignado semanalmente un número de horas de clase, tutorías y guardias que deben cubrir de acuerdo con la siguiente matriz:

$$M = \begin{array}{c} \\ 1.^{\circ} \\ 2.^{\circ} \\ 3.^{\circ} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{clase} & \text{guardias} & \text{tutorías} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

El centro paga cada hora de clase a 12 €, cada hora de guardia a 3 € y cada hora de tutoría a 6 €, según el vector:

$$C = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

El centro dispone de 5 profesores para primer curso, 4 para segundo y 6 para tercero, representados por el vector:

$$P = (5 \quad 4 \quad 6)$$

Calcula cada uno de los siguientes productos de matrices e interpreta los resultados.

a) PM **b)** MC **c)** PMC

73 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula: $A^2 - 4A + 4I_3$

74 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$$

75 Una fábrica produce dos modelos de acumuladores de calor, G y P, en tres terminaciones: normal, lujo y especial. Del modelo G, produce 500 unidades normales, 300 unidades de lujo y 200 especiales. Del modelo P, produce 400 unidades normales, 200 unidades de lujo y 100 especiales. La terminación normal necesita 20 horas de fabricación de piezas y 1,5 horas de montaje. La terminación de lujo necesita 25 horas de fabricación y 2 horas de montaje, y la terminación especial necesita 30 horas de fabricación y 2,5 horas de montaje.

a) Representa en dos matrices la información dada.

b) Escribe una matriz que exprese las horas de fabricación y de montaje empleadas para cada uno de los modelos.

c) Si cada hora de fabricación se paga a 15 € y cada hora de montaje a 18 €, escribe una matriz que exprese el coste total de los acumuladores G y P

76 Una fábrica de muebles hace mesas (M), sillas (S), y armarios (A), y cada uno de ellos en tres modelos: económico (E), normal (N) y lujo (L). Cada mes produce de mesas, 50 E, 40 N y 30 L; de sillas, 200 E, 150 N y 100 L; de armarios, 40 E, 30 N y 20 L.

a) Representa esta información en una matriz.

b) Calcula la matriz que da la producción de un año.

Para profundizar

77 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula la matriz B tal que $A + B = AA^T$

78 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

79 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

calcula A^k

80 Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Siendo I la matriz identidad 3×3 y O la matriz nula 3×3, prueba que $A^3 + I = O$

b) Calcula A^{10}

81 Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

halla el valor de a para que se cumpla la igualdad:

$$A^2 + 2A + I = O$$

siendo I la matriz identidad de orden 3 y O la matriz nula de orden 3

82 Resuelve el sistema matricial:

$$5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$$

$$3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Ejercicios y problemas propuestos

1 Determinantes de orden 2 y 3 por Sarrus

39 Calcula mentalmente los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 7 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix}$

40 Calcula mentalmente los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -15 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

41 Halla los determinantes que se puedan calcular de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

42 Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$

43 Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

44 Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

45 Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

46 Siendo $E^t = (1 \quad 2 \quad 3)$ la traspuesta de la matriz E, calcula el determinante de la matriz $E \cdot E^t$

2 Propiedades de los determinantes

47 Sea: $|A| = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 8 \\ -7 & 6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 219$ y $|B| = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 5 & 6 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Halla mentalmente $|B|$. ¿Qué propiedad has utilizado?

48 Halla el valor de los siguientes determinantes y comprueba que son iguales. La 3.ª fila del 2.º se ha obtenido sustituyéndola por la suma del doble de la 2.ª más la 3.ª

a) $|A| = \begin{vmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

49 Comprueba la identidad $|A| = |A^t|$ siendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

50 Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

calcula el siguiente determinante y enuncia las propiedades que utilices:

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$$

51 Si todos los elementos de una matriz de orden 3×3 se multiplican por (-2), ¿qué relación hay entre los determinantes de la matriz original y de la nueva matriz?

52 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$

comprueba que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

3 Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea

53 Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 7 \\ 9 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

halla:

a) El menor complementario del elemento a_{12}

b) El menor complementario del elemento a_{31}

54 Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & 7 & -8 \\ 9 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

halla:

a) El adjunto del elemento a_{22}

b) El adjunto del elemento a_{23}

55 Calcula el valor de los siguientes determinantes por los adjuntos de la línea más sencilla:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \\ 6 & 4 & -5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -7 & 8 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 9 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

56 Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 5 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -7 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & -9 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

57 Comprueba que las siguientes matrices tienen el mismo determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

4 Matriz inversa

58 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

comprueba que B es la inversa de A

59 Halla la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

60 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determina si es invertible y, en su caso, calcula la matriz inversa.

61 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Determina si es invertible y, en su caso, calcula la matriz inversa.

62 De las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determina cuáles tienen inversa y, en los casos en que exista, calcula la matriz inversa y el determinante de dicha inversa.

63 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Determina si es invertible y, en su caso, calcula la matriz inversa.

64 Considera la matriz A que depende de un parámetro k:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de k tiene A inversa? Justifica la respuesta.

b) Para $k = -5$, halla la inversa de A

5 Ecuaciones con matrices y determinantes

65 Siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

razona si posee solución la ecuación matricial $A \cdot X = B$ y, en caso afirmativo, resuélvela.

66 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Halla una matriz X que verifique:

$$ABX = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

67 Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

68 Determina la matriz X de dimensión 2×2 tal que:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

69 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentra todas las matrices:

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

tales que $XA = I$; donde I es la matriz identidad de orden 2

83 Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

a) Halla los valores de x e y tales que $AX = U$

b) Encuentra los posibles valores de m para los que los vectores:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes.

84 Resuelve la ecuación matricial $A^2 \cdot X = 2B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

85 Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula una matriz X tal que $A^2 + AX = I$

86 Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & 3 & 2 \\ x^2 & 1 & 9 & 4 \\ x^3 & -1 & 27 & 8 \end{vmatrix} = 0$

87 ¿Para qué valores de a y b la siguiente matriz es ortogonal?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & \operatorname{sen} b \\ 0 & -\operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}$$

88 Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0$

89 Se sabe que la siguiente matriz M tiene de rango 1

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & a & b \\ 2 & c & d \end{pmatrix}$$

¿Pueden determinarse a, b, c y d? Justifica la respuesta y, en caso afirmativo, hállalos.

90 Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Explica brevemente el concepto de independencia lineal de vectores en $\mathbb{R}^3$ y enuncia alguna condición equivalente a que tres vectores de $\mathbb{R}^3$ sean linealmente independientes.

b) Escribe el vector $\vec{b}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, siendo:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

91 Dados los vectores:

$$\vec{u} = (a, 1 + a, 2a), \vec{v} = (a, 1, a) \text{ y } \vec{w} = (1, a, 1):$$

a) Determina los valores de a para los que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

b) Estudia si el vector $\vec{c} = (3, 3, 0)$ depende linealmente de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $a = 2$. Justifica la respuesta.

92 Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula los valores de x para los que no existe la inversa de A

b) Para $x = 3$, calcula, si es posible, A^{-1}

Para profundizar

93 Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determina para qué valores del parámetro λ la matriz A no tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $\lambda = -2$

94 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

calcula $(A^t A^{-1})^2 A$

95 Sean los vectores:

$\vec{u} = (-1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 5, -2)$, $\vec{x} = (4, 1, 3)$ y $\vec{z} = (4, 1, -8)$

a) ¿Se puede expresar $\vec{x}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$? Si es así, escribe dicha combinación lineal; si no es así, explica por qué.

b) ¿Se puede expresar $\vec{z}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$? Si es así, escribe dicha combinación lineal; si no es así, explica por qué.

c) ¿Son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z}$ linealmente independientes? Justifica la respuesta.

96 Sea M una matriz real cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Halla todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.