TEMA 3. 2º BACHILLERATO A

1. Sea a un número real y el sistema lineal siguiente:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

   a) Discutir el sistema en función del parámetro a
   b) Resolver para el caso de que tenga infinitas soluciones
   c) Resolverlo para a=0 (3 puntos)

2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   a) Hallar el rango de A en función de los valores de k
   b) Para k=2, hallar si existe, la solución del sistema AX=B
   c) Para k=1, hallar si existe, la solución del sistema AX=C (3 puntos)

3. Dado el sistema homogéneo

$$\begin{cases} \alpha x + 2y + z = 0 \\ \alpha x - y + 2z = 0 \\ x - \alpha y + 2z = 0 \end{cases}$$

   Resolverlo en todos los casos. (2 Puntos)

4. El cajero automático de una determinada entidad bancarias sólo admite billetes de 50, 20 y 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averigua el número de cada tipo de billetes, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble del de los de 20. (2 puntos)

TEMA 3 2ºA

(3) 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right)$$

$|A| = a^3+1+1-a-a-a = a^3-3a+2$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$a=1$
$a=-2$

a) Si $a \neq 1,-2$ $rg\ A = rg\ A^* = n^o\ inc. = 3 \rightarrow$ SCD

Si $a=1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $rg\ A = 1 = rg\ A^* < n^o\ inc.$ SCI

Si $a=-2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$ $|A^*| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16+1-\cancel{2}+\cancel{2}-4-4 = 9$

$rg\ A = 2 \neq rg\ A^* = 3$ SI

b) Si $a=1$ $y=\lambda$ $z=\gamma$ $x = 1-\lambda-\gamma$
$(1-\lambda-\gamma, \lambda, \gamma)$ $\forall \lambda, \gamma \in \mathbb{R}$

c) Si $a=0$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $|A|=2$ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{1}{2}$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}$ $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}$

(3) 2 $|A| = \begin{vmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2k-\cancel{2k^2}+2k^3+2k^3+\cancel{2k^2}-2k =$
$= 4k^3-4k = 0$ $4k(k^2-1)=0$ $k=0$, $k=1$, $k=-1$

a) Si $k \neq 0,1,-1$ $rg\ A = 3$

Si $k=0$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $rg\ A = 2$

Si $k=1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $rg\ A = 2$

Si $k=-1$ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $rg\ A = 2$

b) $k=2$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ SCD

$|A| = 4 \cdot 2(4-1) = 8 \cdot 3 = 24$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \\ 8 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{24} = \dfrac{-24-\cancel{48}+32+32+\cancel{48}-24}{24} = \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3}$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 12 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{24} = \dfrac{24+32+96-96-32-24}{24} = 0$

$A^{-1} = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} 2 & -12 & 8 \\ 6 & -12 & 0 \\ 2 & 12 & -4 \end{pmatrix}$

$z = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 12 \\ 1 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{24} = \dfrac{-16-\cancel{24}+48+48+\cancel{24}-16}{24} = \dfrac{64}{24} =$
$= \dfrac{8}{3}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{matrix}} & 1 & 4 \\ & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$ $|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3-8+6+8+6-3 = 6 \neq 0$

$rg\, A = 2 \neq rg\, A^* = 3$ SI No tiene solución.

2) (3) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 0 \\ a & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -a & 2 & 0 \end{array}\right)$ $|A| = -2a - a^2 + 4 + 1 + 2a^2 - 4a = a^2 - 6a + 5$

$a = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$

- Si $a \neq 1, 5$ $rg\, A = rg\, A^* = n^o\, inc = 3$ SCD Sol. trivial $(0,0,0)$
- Si $a = 1$ $rg\, A = rg\, A^* < n^o\, inc$ SCI

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\lambda \\ 1 & -1 & -2\lambda \end{array}\right)$ $|B| = -3$

$x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{\lambda + 4\lambda}{-3} = -\frac{5\lambda}{3}$ $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & -2\lambda \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2\lambda + \lambda}{-3} = \frac{-\lambda}{-3} = \frac{\lambda}{3}$

$\left(-\frac{5\lambda}{3}, \frac{\lambda}{3}, \lambda\right)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

- Si $a = 5$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & -\lambda \\ 5 & -1 & -2\lambda \end{array}\right)$ $|B| = -15$

$x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{\lambda + 4\lambda}{-15} = \frac{5\lambda}{-15} = \frac{\lambda}{-3}$ $\left(-\frac{\lambda}{3}, \frac{\lambda}{3}, \lambda\right)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -\lambda \\ 5 & -2\lambda \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-10\lambda + 5\lambda}{-15} = \frac{-5\lambda}{-15} = \frac{\lambda}{3}$

(4) $\left.\begin{array}{l} x+y+z = 225 \\ 50x + 20y + 10z = 7000 \\ x + z = 2y \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x+y+z = 225 \\ 50x + 20y + 10z = 7000 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\}$ $|A| = -120$

$x = -\frac{12000}{-120} = 100$ $y = \frac{-9000}{-120} = 75$ $z = \frac{-6000}{-120} = 50$