TEMA 8. 2º BACHILLERATO B

1. Los costes mensuales de producción de un determinado producto vienen dados por la función $C(x) = 180x + 12000$ €. Los ingresos se ajustan a la función $I(x) = 500x - \frac{1}{2}x^2$ €. Determina:

a) ¿En qué intervalo debe situarse la producción para no perder dinero?

b) ¿Cuántas unidades tiene que producir mensualmente la empresa para obtener el máximo beneficio? En este caso, ¿a cuánto asciende la ganancia por unidad de producto?

2. Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$, se pide:

a) Su dominio, posibles simetrías y asíntotas.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Sus máximos y mínimos.

c) Puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad.

3. Sea la función $f(x) = \frac{ax^2}{(x-1)(x-2)}$, donde a es un cierto parámetro real.

a) ¿Cuál es el valor de a si sabemos que la recta $y = 4$ es una asíntota horizontal para la función dada? Justificar la respuesta.

b) Para $a = 1$, estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función y determina sus extremos relativos.

4. El número de vehículos que pasaron cierto día por el peaje de una autopista viene representado por la función $N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2, & 0 \le t \le 9 \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2 & ,9 < t \le 24 \end{cases}$

Donde N indica el número de vehículos y t representa el tiempo transcurrido (en horas) desde las 0:00 horas.

a) ¿Entre qué horas aumentó el número de vehículos que pasaban por el peaje? ¿Entre qué horas disminuyó?

b) ¿A qué hora pasó el mayor número de vehículos? ¿Cuántos fueron?

5. Calcula las asíntotas de la siguiente función: $f(x)=\frac{2x|x-3|}{x+1}$

① $C(x) = 180x + 12000$

$I(x) = 500x - \frac{1}{2}x^2$

a) $B(x) = I(x) - C(x) = 500x - \frac{1}{2}x^2 - 180x - 12000 = 320x - \frac{1}{2}x^2 - 12000 = 0$

$x_1 = 40, \quad x_2 = 600$

No se pierde dinero si $B(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [40, 600]$

b) $B'(x) = 320 - x = 0$

$(0, 320)$ $B' > 0$
$(320, +\infty)$ $B' < 0$ > MÁX $x = 320$.

Producir 320 unidades
$B(320) = 39200$ € de beneficio total
Por cada unidad $39200 : 320 = 122,5$ €

② $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

$f(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = \frac{-x^3}{1-x^2}$ Impar

AV $\lim_{x \to 1} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{1}{0} = \pm\infty \rightarrow \boxed{x = 1}$; $\lim_{x \to -1} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{-1}{0} = \pm\infty \Rightarrow \boxed{x = -1}$

AH $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty$

AO $m = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x - x^3} = -1$; $n = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{1-x^2} + x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x - x^3}{1-x^2} = 0 \Rightarrow \boxed{y = -x}$

b) $f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2} = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{3}, \quad x_3 = -\sqrt{3}$

$(-\infty, -\sqrt{3})$ $f' < 0$
$(-\sqrt{3}, -1)$ $f' > 0$ > MÍN $(-\sqrt{3}; 2,60)$
$(-1, 0)$ $f' > 0$
$(0, 1)$ $f' > 0$
$(1, \sqrt{3})$ $f' > 0$
$(\sqrt{3}, +\infty)$ $f' < 0$ > MÁX $(\sqrt{3}; -2,60)$

c) $f''(x) = \frac{(6x-4x^3)(1-x^2)^{\cancel{2}} - (3x^2-x^4)\cdot 2\cancel{(1-x^2)}}{(1-x^2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{6x - 6x^3 - 4x^3 + 4x^5 - 6x^2 + 2x^4}{(1-x^2)^3}$

$= \frac{4x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 6x^2 + 6x}{(1-x^2)^3} = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x_2 = 1,45 \\ x_3 = 0,58 \end{cases}$

$(-\infty, -1)$ $f'' < 0$ $\cap$
$(-1, 0)$ $f'' < 0$ $\cap$ > PI $(0, 0)$
$(0; 0,58)$ $f'' > 0$ $\cup$ > PI $(0,58; 0,29)$
$(0,58; 1)$ $f'' < 0$ $\cap$
$(1; 1,45)$ $f'' < 0$ $\cap$ > PI $(1,45; -2,79)$
$(1,45; +\infty)$ $f'' > 0$ $\cup$

③ $f(x) = \dfrac{ax^2}{(x-1)(x-2)}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2}{x^2-3x+2} = a = 4$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-3x+2}$

$f'(x) = \dfrac{2x(x^2-3x+2) - x^2(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = \dfrac{2x^3-6x^2+4x-2x^3+3x^2}{(x^2-3x+2)^2} = \dfrac{-3x^2+4x}{(x^2-3x+2)^2} = 0$

$-3x^2+4x = 0 \rightarrow x(-3x+4) = 0$ $\nearrow x = 0$ $\searrow x = \frac{4}{3}$

$(-\infty, 0)$ $f'(x) > 0$
$(0, 1)$ $f'(x) > 0$
$(1, 4/3)$ $f'(x) < 0$
$(4/3, 2)$ $f'(x) > 0$] Min $(4/3)$
$(2, +\infty)$ $f'(x) > 0$

④ $N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2 & 0 \le t \le 9 \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2 & 9 \le t \le 24 \end{cases}$

a) $N'(t) = \begin{cases} 2\left(\frac{t-3}{3}\right)\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2t-6}{9} = 0 \Rightarrow t = 3 \\ -2\left(\frac{t-15}{3}\right)\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-2t+30}{9} = 0 \Rightarrow t = 15 \end{cases}$

$(0,3)$ $N'(t) < 0$
$(3,9)$ $N'(t) > 0$
$(9,15)$ $N'(t) > 0$
$(15,24)$ $N'(t) < 0$

Aumenta de $(3,9)$ y de $(9,15)$
Disminuye de $(0,3)$ y de $(15,24)$

b) Máximo $t = 15$
Nº de vehículos $N(15) = 10 - 0 = 10$ Vehículos

⑤ $f(x) = \dfrac{2x|x-3|}{x+1} = \begin{cases} \dfrac{2x(x-3)}{x+1} & \text{si } x-3 \ge 0 \\ \dfrac{2x(-x+3)}{x+1} & \text{si } x-3 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} ② \dfrac{2x^2-6x}{x+1} & \text{si } x \ge 3 \\ ① -\dfrac{2x^2+6x}{x+1} & \text{si } x < 3 \end{cases}$

① $f_1(x) = \dfrac{-2x^2+6x}{x+1}$ si $x < 3$

AV $\lim\limits_{x\to -1} f_1(x) = \frac{-8}{0} = \pm\infty \Rightarrow \boxed{x = -1}$

AH $\lim\limits_{x\to -\infty} f_1(x) = \pm\infty$ NO

AO $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^2+6x}{x^2+x} = -2$ $\boxed{y = -2x+8}$

$n = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^2+6x}{x+1} + 2x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x}{x+1} = 8$

$f_2(x) = \dfrac{2x^2-6x}{x+1}$ $x \ge 3$

AV No tiene

AH No tiene $\boxed{y = 2x-8}$

AO $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-6x}{x^2+x} = 2$

$n = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-6x-2x^2-2x}{x+1} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-8x}{x+1} = -8$