TEMA 6. 2º BACHILLERATO A.

1. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (1,2,-1), es paralela al plano 2x+y-z=3 y es perpendicular a la recta intersección de los planos $\begin{cases} 3y+z=7 \\ x+4y+z=8 \end{cases}$

   Calcula la distancia del punto P(2,1,-3) a la recta obtenida.

2. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r:\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-3\lambda \end{cases}$$

   Y es perpendicular al plano $\pi: 3x-y+2z-1=0$. Calcula el ángulo formado por la recta y el plano dados

3. Dadas las rectas $r:\begin{cases} x+z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ s:$\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y-z=2 \end{cases}$

   Calcula la posición relativa. Si se cortan calcula el punto de corte. En el caso de que se crucen halla la recta perpendicular común a r y s.

   Halla la distancia mínima entre ellas.

4. Calcula los puntos de la recta $r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$ que equidistan de los planos siguientes

$$\pi_1: 2x-y+2z-6=0 \quad y \quad \pi_2: 2x+2y-z+7=0$$

5. Halla el simétrico de A(2, -1, 3) respecto de:

   a) El plano $\pi: 3x+2y-1z-5=0$

   b) La recta $r:\begin{cases} 2x+3z=5 \\ x-4y+3z=0 \end{cases}$

   c) El punto B(-2,4,6)

TEMA 6. 2º BACH. A 2021-22

(1) $A(1,2,-1)$ $P(2,1,-3)$

$\pi: 2x+y-z=3 \rightarrow \vec{n}(2,1,-1)$

$s: \begin{cases} 3y+z=7 \\ x+4y+z=8 \end{cases}$ $\vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1,1,-3)$

$r: \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2,7,3) = \vec{v_r}$

$r: \begin{cases} x = 1-2\lambda \\ y = 2+7\lambda \\ z = -1+3\lambda \end{cases}$

$\vec{PA}(1,-1,-2)$

$d(P,r) = \dfrac{|\vec{PR} \times \vec{v_r}|}{|\vec{v_r}|} = \dfrac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{\sqrt{4+49+9}} = \dfrac{|(-11,-1,-5)|}{\sqrt{62}} = \dfrac{\sqrt{147}}{\sqrt{62}} = 1{,}54\ u$

(2) $r: \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$ $\vec{v_r}(-1,2,-3)$ $R(2,1,0)$

$\pi: 3x-y+2z-1=0$ $\vec{n}(3,-1,2)$

$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1(x-2) - 7(y-1) + (-5)z = 0$

$x - 7y - 5z - 2 + 7 = 0$

$\pi: x - 7y - 5z + 5 = 0$

$\cos(\widehat{\vec{v_r},\vec{n}}) = \dfrac{|\vec{v_r}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v_r}||\vec{n}|} = \dfrac{|(3,-1,2)(-1,2,-3)|}{|(-1,2,-3)|\,|(3,-1,2)|} = \dfrac{|-3-2-6|}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \dfrac{11}{14}$

$\Rightarrow \beta = 38{,}21^\circ$

$\alpha = 90^\circ - 38{,}21^\circ = 51{,}79^\circ$

(3) $r: \begin{cases} x+z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ $\vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1,1,-1)$ $R(0,2,2)$

$\vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1,2,-1)$ $S(0,-3,1)$

$\vec{RS}(0,-5,-1)$

$[\vec{v_r},\vec{v_s},\vec{RS}] = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1,0,1) \neq 0$

SE CRUZAN

Perpendicular común:

$\pi_1: \begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y - z + 6 = 0$

$\pi_2: \begin{vmatrix} x & y+3 & z-1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 2y - 6 - 2z + 2 = 0$

$t: \begin{cases} x-2y-z+6=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases}$

Distancia mínima $h = \dfrac{V}{A} = \dfrac{[\vec{v_r},\vec{v_s},\vec{RS}]}{|\vec{v_r}\times\vec{v_s}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ u$

(4) $d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2)$ $\qquad P(1+\lambda,\ 2-\lambda,\ 2\lambda)$

$$\frac{|2(1+\lambda) - (2-\lambda) + 2(2\lambda) - 6|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|2(1+\lambda) + 2(2-\lambda) - (2\lambda) + 7|}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$|2+2\lambda-2+\lambda+4\lambda-6| = |2+2\lambda+4-2\lambda-2\lambda+7|$$

$$|7\lambda-6| = |-2\lambda+13| \rightarrow 7\lambda-6 = -2\lambda+13 \rightarrow 9\lambda = 19 \Rightarrow \lambda = \frac{19}{9}$$

$$\hookrightarrow 7\lambda-6 = 2\lambda-13 \Rightarrow 5\lambda = -7 \rightarrow \lambda = -\frac{7}{5}$$

$$P_1\left(\frac{28}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{38}{9}\right) \quad ; \quad P_2\left(-\frac{2}{5}, \frac{17}{5}, -\frac{14}{5}\right)$$

(5) a) $\pi: 3x+2y-z-5=0$ $\qquad \vec{n}(3,2,-1) = \vec{v}_r$

$$r: \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$$

$$3(2+3\lambda) + 2(-1+2\lambda) - (3-\lambda) - 5 = 0$$

$$6+9\lambda-2+4\lambda-3+\lambda-5=0$$

$$14\lambda - 4 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

$$Q\left(\frac{20}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{19}{7}\right) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z+3}{2}\right)$$

$$P'\left(\frac{26}{7}, \frac{1}{7}, \frac{17}{7}\right)$$

b) $r: \begin{cases} 2x+3z=5 \\ x-4y+3z=0 \end{cases}$ $\qquad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = (12,-3,-8)$ $\qquad R(1,1,1)$

$$r: \begin{cases} x = 1+12\lambda \\ y = 1-3\lambda \\ z = 1-8\lambda \end{cases}$$

$$\pi;\ 12x - 3y - 8z + D = 0 \Rightarrow 24+3-24+D=0 \Rightarrow D=-3$$

$$\pi: 12x - 3y - 8z - 3 = 0$$

$$12(1+12\lambda) - 3(1-3\lambda) - 8(1-8\lambda) - 3 = 0$$

$$217\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{2}{217}$$

$$Q\left(\frac{241}{217}, \frac{211}{217}, \frac{201}{217}\right) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z+3}{2}\right)$$

$$P'\left(\frac{48}{217}, \frac{639}{217}, -\frac{249}{217}\right)$$

c) $(-2,4,6) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z+3}{2}\right) \Rightarrow P'(-6,9,9)$