

TEMA 5

3 ①  $x + y + az + 2 = 0$   
 $x + ay + z + 1 = 0$   
 $ax + y + z - 3 = 0$

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$   $|A| = a + a + a - a^3 - 1 - 1 = 0$   
 $-a^3 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = 1 \end{cases}$

Si  $a \neq -2, 1$   $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^*$  Se cortan en un punto

Si  $a = -2$   $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$   $|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 + 2 - 2 - 8 - 1 + 3 = 0$

$\text{rg } A = 2 = \text{rg } A^*$  No coincidentes y se cortan en una recta

Si  $a = 1$   $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$   $\text{rg } A = 1 \neq \text{rg } A^* = 2$  Tres planos paralelos.

b) Si  $a \neq -2, 1$  Se cortan en un punto

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$   $|A| = -(a-1)^2(a+2)$

$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-2a - a + 3 - 3a^2 + 2 + 1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-3a^2 - 3a + 6}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(a-1)(a+2)}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a-1}$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-1 + 3a - 2a + a^2 - 3 + 2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{a^2 + a - 2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-1)(a+2)}{-(a-1)^2(a+2)} = -\frac{1}{a-1}$

$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ a & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{3a - 2 - a + 2a^2 + 1 - 3}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{2a^2 + 2a - 4}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-1)(a+2)}{-(a-1)^2(a+2)} = -\frac{1}{a-1}$

Punto de corte  $\left(\frac{1}{a-1}, -\frac{1}{a-1}, -\frac{1}{a-1}\right) \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$

②  $r: \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x + y - 3z = 2 \end{cases}$   $s: \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = a \end{cases}$

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -a \end{pmatrix}$

$|A| = 1 - 6 + 1 + 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 3$

$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -a \end{vmatrix} = 3a - 2 - 2 + 3 + 2 - 2a = a + 1 = 0$

Si  $a \neq -1$   $\text{rg } A^* = 4$

Si  $a = -1$   $\text{rg } A^* = 3 \Rightarrow$

Si  $a = -1 \Rightarrow \text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* \Rightarrow$  SECANTES