Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

38. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos, de las siguientes funciones polinómicas.

a) $y = -2x^2 + 3x$
b) $y = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4$
c) $y = 4x^3 - x^2 - x + 5$
d) $y = x^5 - 5x^3$

39. Estudia la monotonía y calcula los máximos y mínimos de estas funciones.

a) $y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$
b) $y = |x^2 - 4| - 3$

40. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos, de las siguientes funciones polinómicas.

a) $f(x) = x^2(x + 1)$
b) $g(x) = 3x^3 - 7x + 2$
c) $h(x) = -x^4 + 3x^2 - 2x$

41. Estudia el crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones, e indica si tienen máximos y mínimos relativos y dónde se encuentran.

a) $y = |x^2 - 2|$
b) $y = |-x^2 + 6x - 9|$
c) $y = |-x^2 + 5x - 6|$

42. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de estas funciones racionales.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$
b) $g(x) = \dfrac{40 - 5x}{10 - x}$
c) $h(x) = \dfrac{7x^2 + 2}{x}$
d) $i(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$
e) $j(x) = \dfrac{1}{x - 2}$
f) $k(x) = -\dfrac{x^3}{x^2 - 3}$

43. Estudia la monotonía y halla los máximos y mínimos de las siguientes funciones logarítmicas.

a) $y = \ln x - 2$
b) $y = \ln(x - 2)$
c) $y = \dfrac{2}{x} + \ln x$
d) $y = \dfrac{\ln x}{x}$
e) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$
f) $y = \ln\sqrt{x}$

44. Estudia el crecimiento y decrecimiento de estas funciones trigonométricas, y decide si alcanzan máximos o mínimos en algún punto.

a) $f(x) = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
b) $g(x) = x - \mathit{sen}\, x$
c) $h(x) = \mathit{arc\ tg}\, x$

45. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y calcula los máximos y mínimos de estas funciones.

a) $y = 2x^2 \cdot e^x$
b) $y = (x - 4) \cdot e^x$
c) $y = e^{x^2 + 2x} + 1$
d) $y = x \cdot 2^x$
e) $y = 2^{x - x^2} - 3$
f) $y = 2^{x^3 + 1}$

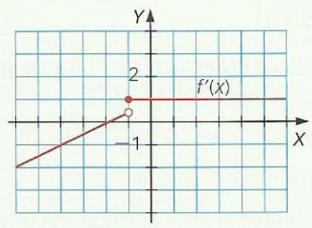
46. Determina los máximos y mínimos de estas funciones utilizando la derivada segunda.

a) $y = x^3 - 24x - 6$
b) $y = 8x + 6x^2 - x^4$
c) $y = \dfrac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$
d) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$
e) $y = \ln(x^2 + 1)$
f) $y = (x^2 + 4)e^x$

47. Demuestra que la función $y = x^3 - 2x^2 + 6x - 13$ es siempre creciente.

48. Comprueba que la función $y = x^5 + mx + 2$ es creciente para cualquier valor positivo del parámetro m.

49. La derivada de una función continua f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que se representa como indica la figura.



a) ¿Es derivable la función f en todos sus puntos?
b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f.
c) ¿Tiene algún extremo relativo? Indica para qué valor de x y de qué tipo es.
d) Sabiendo que $f(1) = 1$, calcula $f(2)$.

50. Dada la función $y = ax^2 + bx + c$, determina los coeficientes a, b y c sabiendo que la gráfica de esta función pasa por los puntos (1, 2) y (2, 6) y que, en este último punto, la recta tangente a la curva tiene como ecuación $7x - y - 8 = 0$. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como su extremo relativo.

51. Calcula los valores de a, b y c sabiendo que la función $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (1, 0) y (0, −2) y presenta un máximo en $x = \dfrac{3}{2}$. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como el extremo relativo.

52. La función $y = x^3 + ax$ presenta un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$.

a) Determina el valor del parámetro a.
b) Para ese valor, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

53. Calcula los valores de a, b, c y d sabiendo que la función $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pasa por el origen de coordenadas, por el punto $\left(1, \frac{5}{6}\right)$ y tiene un máximo relativo en el punto de abscisa 1 y un mínimo relativo en el punto de abscisa 2.

54. La función $y = \dfrac{ax^2 + x + b}{x^2 + 1}$ alcanza un extremo relativo en $x = -1$ y pasa por el punto $P\left(-2, \frac{13}{5}\right)$.

a) Determina el valor de los parámetros a y b.

b) Para esos valores, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

55. Calcula $a \neq 0$ sabiendo que $f(x) = \dfrac{a^2x}{2x^2 - 5ax + 2a^2}$ tiene un extremo relativo en $x = 2$. Para esos valores, determina el dominio de la función f.

56. Calcula a, b y c de modo que la función $y = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 + ax + c}$ tenga un extremo relativo en el punto $(2, -1)$ y pase por el origen de coordenadas.

57. Dada la función $y = x \cdot e^{ax}$, determina el valor de la constante a sabiendo que dicha función alcanza un máximo relativo en el punto $x = 1$.

58. La función $f(x) = x + ax \cdot |x|$ alcanza un extremo relativo en $x = 1$. Halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

59. Estudia la curvatura de estas funciones.

a) $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$

b) $y = x^4 - 6x^2$

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

e) $y = \sqrt{4 + x^2}$

f) $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{2}$

g) $y = 1 - 2 \ln x$

h) $y = \ln (x^2 - x)$

i) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

j) $y = (x - 1) \cdot e^x$

k) $y = \dfrac{x}{e^x}$

l) $y = 1 + 2\, sen\, x$

m) $y = cos\, 2x$

n) $y = sen^2\, x$

60. Dada la función $y = x^3 + ax^2 - 3x$, halla el valor del parámetro a sabiendo que la función tiene un punto de inflexión en $x = 1$.

61. Halla los valores de a, b y c para los que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un punto de inflexión en $x = 3$, pase por el punto $P(1, 0)$ y alcance un mínimo relativo en $x = 1$.

62. Demuestra que la función $y = x^4 + 3x^2 - 5x + 6$ no tiene ningún punto de inflexión.

63. La función $y = x^3 + ax^2 - ax + b$ presenta un punto de inflexión en $P(1, 3)$.

a) Determina los valores de a y b.

b) Para esos valores, realiza el estudio de la monotonía y curvatura de la función.

64. Calcula los valores de los parámetros a y b para los que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$ tiene un punto de inflexión en $x = 1$, en el cual la recta tangente a la curva forme 45° con el eje OX.

65. Encuentra una función polinómica de cuarto grado sin término en x^3 que pase por el punto $P(0, 3)$, tenga un extremo relativo en el punto $Q(1, 0)$ y alcance un punto de inflexión para $x = \frac{1}{2}$. ¿Cuál es la naturaleza del extremo relativo?

66. La función $y = x^3 - ax^2 - 4x + b$ corta al eje OX en $x = 3$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $\frac{2}{3}$. Halla a y b.

Optimización de funciones

67. De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 20 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima. Determina su área.

68. Considera los triángulos rectángulos de 8 cm de hipotenusa. ¿Cuál es el que mayor área tiene y cuánto mide?

69. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un círculo de 6 cm de radio.

70. Comprueba que el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un círculo de radio r es un cuadrado de lado $\sqrt{2}r$.

71. Entre todos los rectángulos de 3 m² de área, halla las dimensiones del que tenga mínimo el producto de las diagonales.

72. Determina las dimensiones de los lados de un rectángulo de área máxima que está inscrito en una semicircunferencia de 5 cm de radio, teniendo uno de los lados sobre el diámetro de ella.

73. La suma del perímetro de un cuadrado más la longitud de circunferencia de un círculo es de 98 cm. ¿Cuál es la dimensión del cuadrado y el radio del círculo si la suma de las áreas ha de ser mínima?

74. De todos los prismas rectos de base cuadrada y de 24 cm² de área total, ¿cuál es el que tiene mayor volumen?

ACTIVIDADES

75. Halla las dimensiones de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al dar una vuelta completa alrededor de un lado, genera un cilindro de volumen máximo.

76. El perímetro de un triángulo isósceles mide 10 m. Si gira alrededor de la altura correspondiente al lado desigual, genera un cono. Calcula los lados del triángulo para que el volumen del cono sea máximo.

77. De todos los cilindros que pueden inscribirse en una esfera de 9 cm de radio, halla la altura y el radio del que tiene mayor volumen.

78. De todos los conos que pueden inscribirse en una esfera de 9 cm de radio, halla la altura y el radio del que tiene mayor volumen.

79. De todas las rectas que pasan por el punto (2, 1), encuentra aquella que determina, junto con los semiejes de coordenadas positivos, un triángulo de área mínima.

80. Considera todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice en la recta de ecuación $x + 2y = 2$, y determina los vértices del de mayor superficie y halla dicha superficie.

81. Determina los puntos de la parábola $y = x^2$ que están a mínima distancia del punto (0, 1). Calcula dicha distancia.

82. Un rectángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas (0, 0), (a, 0), (a, b) y (0, b), de modo que el punto (a, b) tiene coordenadas positivas y está situado en la curva de ecuación $y = \frac{1}{x^2} + 4$. De todos estos rectángulos, determina razonadamente el de área mínima.

Teorema de Rolle

83. Aplica el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ en el intervalo $[-4, 2]$ e interprétalo geométricamente.

84. Prueba que la función $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$, y calcula el punto del intervalo cuya existencia asegura su tesis.

85. Cada una de las funciones siguientes toma el mismo valor en los extremos del intervalo $[-2, 2]$, pero no hay ningún valor $c \in (-2, 2)$ en el que la derivada se anule. Justifica en cada caso por qué no contradicen el teorema de Rolle.

a) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ b) $g(x) = 2 - |x|$

86. Comprueba que la función $f(x) = 3 \cdot \cos^2 x$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Calcula también el valor al que se refiere la tesis del teorema.

87. Considera la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{16 - x^2} & \text{si } -4 \le x < 0 \\ -x^2 + 4 & \text{si } 0 < x \le 2 \end{cases}$$

Analiza si cumple las hipótesis del teorema de Rolle en $[-4, 2]$. En caso afirmativo, halla el punto que indica la tesis del citado teorema e interpreta geométricamente el resultado.

88. Determina posibles valores de a para los que se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^3 - 7x$ en el intervalo $[1, a]$. Halla el punto que se obtiene.

89. Determina los valores de a, b y c para los que puede aplicarse el teorema de Rolle a la siguiente función en su intervalo de definición.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ cx + 1 & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Halla el valor que asegura la tesis.

90. Calcula el valor del parámetro λ para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[-\sqrt{2}, 2]$ a la función $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{\lambda - 1}{x} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Encuentra el punto que asegura la tesis e indica si se trata de un máximo o un mínimo relativo. Representa gráficamente la función en ese intervalo para el valor de λ obtenido.

91. Calcula el valor de a, b y c para que la función $f(x)$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, c]$. Determina en ese caso el valor que asegura la tesis del teorema.

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \le 1 \\ ax^2 + b(x - 1) + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

92. Demuestra que la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x + 9 = 0$ tiene una única raíz real. Sitúala en un intervalo de longitud $\frac{1}{2}$ en el que se encuentre.

93. Dada la función $f(x) = x^3 + 2x - 4$, demuestra que corta al eje OX únicamente en un punto y determínalo en un intervalo de longitud $\frac{1}{2}$.

94. Considera la función $f(x) = e^{x-2} + x - 5$. Demuestra que se anula únicamente para un valor y encuéntralo en un intervalo de longitud $\frac{1}{4}$.

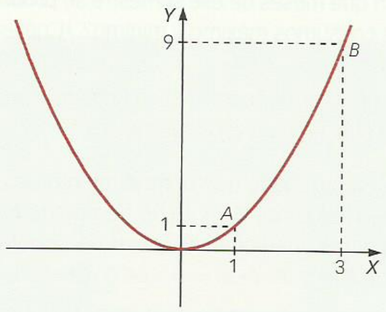
Teorema del valor medio o de Lagrange

95. Aplica el teorema del valor medio a la función $f(x) = -x^2 + 2x - 8$ en el intervalo $[-3, 3]$, e interprétalo geométricamente.

96. Razona si es aplicable el teorema del valor medio a la función $f(x)=\begin{cases} x\ln x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ en el intervalo $[0, e]$.
En caso afirmativo, halla el valor al que se refiere el teorema.

97. Sea la función $f(x)=\sqrt{|x-7|}$. ¿Se le puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo [8, 10]? ¿Y en el intervalo [6, 8]? Si la respuesta es afirmativa, calcula el punto o los puntos de la tesis del teorema.

98. En el segmento comprendido entre los puntos $A(1, 1)$ y $B(3, 9)$ de la parábola $y=x^2$, halla un punto en el cual la tangente sea paralela a la cuerda AB.



99. Determina los valores de los parámetros a y b para los que se puede aplicar el teorema del valor medio generalizado en el intervalo $[-1, 3]$ a la siguiente función.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & \text{si } x\le 2 \\ x^2+bx-4 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

100. Para la siguiente función, halla los valores de a y b para los que se puede aplicar el teorema del valor medio generalizado en el intervalo [3, 5].

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+6b & \text{si } x<4 \\ \dfrac{2x}{x-3} & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$$

101. Calcula los posibles valores de a y b para los que se puede aplicar el teorema del valor medio generalizado en $[-2, 2]$.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{\sqrt{x+2}} & \text{si } x\ge -1 \\ (x+b)^2 & \text{si } x<-1 \end{cases}$$

Para esos valores, determina el punto en que se verifica la tesis del mismo.

102. Determina los valores de los parámetros a y b para los que se puede aplicar a $f(x)$ el teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo $\left[-1, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x<0 \\ a^2-\operatorname{sen} x & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$$

Para esos valores, determina el punto en que se verifica la tesis.

103. Determina los valores de los parámetros a y b para los que se puede aplicar el teorema de Lagrange en el intervalo $\left[-2, \dfrac{\pi}{2}\right]$ a la siguiente función.

$$f(x)=\begin{cases} e^{ax} & \text{si } x\le 0 \\ a+b\cdot \operatorname{sen} x & \text{si } 0<x \end{cases}$$

Para esos valores, determina el punto en el que se verifica la tesis del mismo.

Regla de L'Hôpital

104. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-3x-4}$ $-3/5$ d) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{4-x^2}{\sqrt{x+2}}$ 0

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2-x+1}{3x^2-6x+3}$ $2/3$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$ $1/8$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x+2}{x^2+2x+1}$ $\nexists$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{3x-2}}$ $-1/6$

105. Halla el resultado de estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$ $\nexists$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{sen} x}{x^2-3x}$ $-2/3$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x\cdot \operatorname{sen} x}$ 0 e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2(2x)}{3x^2}$ $4/3$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4-\left(\frac{1}{3}\right)x^3}{x-\operatorname{tg} x}$ 1 f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-2\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x-2\operatorname{sen} x}$ 1

106. Resuelve.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(e^x+x^3)}{x}$ 1 c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 8x)}{\ln(\cos 4x)}$ 4

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 3x)}{x^2}$ $-9/2$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt[4]{x^3}}$ 0

107. Calcula el valor de estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{\operatorname{sen} x}}{1-\cos x}$ 0 c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x-e^x}{\operatorname{sen}^2 x}$ $-1/2$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x}$ $\ln a-\ln b$ d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^x-x^2}{9-3^x}$ $-\dfrac{4(\ln 2-1)}{9\ln 3}$

108. Resuelve los siguientes límites.

$e^{-1/2}$ a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x^2+x+2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x)^{\frac{1}{x}}$ $e^0=1$

e^2 b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+2}{2-2\operatorname{sen} x}\right)^{\frac{2}{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ e^{-1}

109. Calcula estos límites.

$e^0=1$ a) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$ c) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{tg} x}$ $e^0=1$

$e^0=1$ b) $\lim\limits_{x\to 0} (3x)^{2\operatorname{sen} x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}$ $e^0=1$

110. Calcula el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2}{\ln(1+x)}-\dfrac{2}{x}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{sen\,x}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2}{\ln x}\right)$

111. Resuelve.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{\frac{2}{x}}$ 4

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[x]{e}-1\right)$ $e^0=1$

c) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\cdot tg\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ $-\frac{4}{\pi}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot arc\,tg\left(\dfrac{2}{x}\right)$ 2

112. Halla el valor de estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot tg\,x$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(arc\,sen\,x\cdot cotg\,x)$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tg\,x-1)\cdot sec\,x$

d) $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\cdot tg\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$

113. Calcula los límites de las siguientes funciones cuando x tiende a $+3$.

a) $f(x)=(\ln x)^{e^{-x}}$

b) $g(x)=\left(1+tg\,\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

114. Calcula el valor los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,[tg\,(sen\,x)]}{sen\,(tg\,x)}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-sen\,x}{x\cdot sen\,x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x\cdot\left(arc\,tg\,e^x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

115. Halla el valor de m sabiendo que estos límites son finitos y determina su valor.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}+mx}{x-sen\,x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+m\cdot sen\,x-e^x}{(arc\,tg\,x)^2}$

116. Dado el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x+\mu\cdot x\ln(1+x)}{x^3}$$

calcula el valor del parámetro μ que hace que sea finito y, para ese valor, resuelve el límite.

117. Calcula el valor de los parámetros a y b para los que se verifica este límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos x}{sen(x^2)}=1$$

Problemas con aplicaciones de las derivadas

118. La caldera para la calefacción de un instituto funciona desde las 9 hasta las 14 h. A las 12 h se obtiene el consumo mínimo, que es de 15 litros de combustible. Admitiendo que el consumo de combustible de esa caldera viene dado, en función de la hora del día, a través de la expresión $C(t)=(t-a)^2+b$, con $9\le t\le 14$, determina los valores de a y b.

119. El consumo de agua en un centro de salud de una localidad, en metros cúbicos mensuales, varía durante el primer semestre del año según la expresión $C(t)=8t^3-84t^2+240t$, con $1\le t\le 6$.

a) ¿En qué meses de ese semestre se producen los consumos máximo y mínimo? ¿Cuáles son estos consumos?

b) Justifica los períodos de crecimiento y decrecimiento del consumo de esos seis meses.

120. Se ha comprobado que el rendimiento de una máquina de hielo industrial durante un tiempo de funcionamiento de 20 horas, medido en %, puede describirse mediante la función $R(t)=A\cdot t\cdot(B-t)$, con $0<t\le 20$.

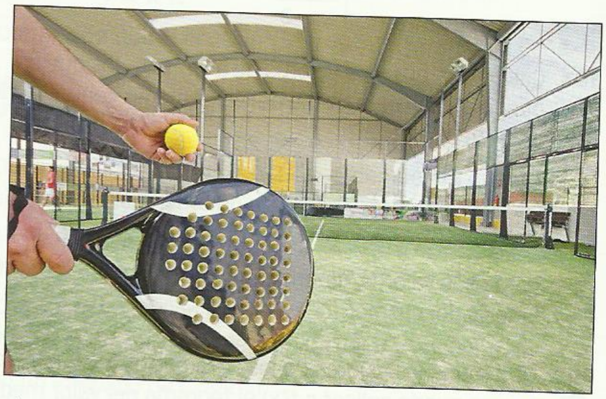
a) Determina el valor de los parámetros A y B sabiendo que el rendimiento máximo del 100 % se alcanza a las 10 horas de su funcionamiento.

b) ¿A qué horas la máquina alcanza un rendimiento del 64 %? Justifica la respuesta.

121. Una empresa que se dedica a la fabricación e instalación de pistas de pádel ha estimado que, al cabo de 15 años de funcionamiento, el balance de sus ingresos y gastos (en miles de euros), en función de los años transcurridos, se asemeja a las siguientes funciones:

Ingresos: $I(t)=-2t^2+50t,\ 0\le t\le 15$

Gastos: $G(t)=t^2-16t+100,\ 0\le t\le 15$



a) Justifica razonadamente los gastos iniciales de la empresa.

b) Encuentra una función $B(t)$ que exprese los beneficios netos de la empresa en función de los años transcurridos desde su fundación.

c) ¿En qué año fueron máximos los beneficios de la empresa? ¿A cuánto ascendían estos beneficios?

122. Las acciones de una empresa tienen una rentabilidad anual, en tanto por ciento, que viene dada por la expresión $R(t) = 3 + \frac{t}{100} - \frac{t^2}{1\,000}$, donde t representa el número de años transcurridos desde la creación de la empresa.

a) Calcula el número de años que debe pasar para que la rentabilidad de las acciones de la empresa sea máxima.

b) ¿A cuánto asciende esa rentabilidad en el momento óptimo?

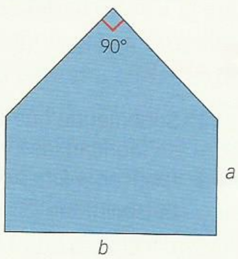
123. Se quiere diseñar un escenario rectangular de 100 m^2 y, para optimizar la visibilidad de los espectadores, el perímetro debe ser mínimo. Calcula el largo y el ancho del escenario.

124. Un pastor dispone de 1 000 m de tela metálica para construir una cerca rectangular para sus ovejas, aprovechando una pared ya existente. Indica las dimensiones para que la superficie del corral sea la mayor posible. ¿Cuál será la superficie del corral?

125. En una feria se quiere montar una barra rectangular de bebidas de 50 cm de ancho con un perímetro de 30 m. Halla las dimensiones exactas para que el área interior sea máxima. ¿Cuál es esta área?

126. Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que, dada la estructura de la empresa, solo puede optar por dos tipos de alarmas, de tipo A o de tipo B. Además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarmas de tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. ¿Cuántas alarmas de cada tipo se deben instalar en la empresa para maximizar la seguridad?

127. El perímetro de la ventana del dibujo mide 6 m. Los lados superiores forman un ángulo de 90°. Determina los valores de a y b para que la ventana permita la mayor luminosidad.



128. Una compañía va a construir un bloque de viviendas con ventanas rectangulares de 1 m^2. Si se quiere minimizar el coste del marco de la ventana, ¿cuáles deben ser sus dimensiones?

129. Se desea fabricar con hoja de lata una papelera cilíndrica, sin tapa, de 10 dm^3 de capacidad. ¿Qué dimensiones deberá tener para que en su fabricación se utilice la menor cantidad de hoja de lata?

130. Halla las dimensiones de un depósito abierto superiormente de 20 m^3 de capacidad, en forma de prisma recto de base cuadrada, que tenga un revestimiento interior de coste mínimo. Sabemos que el precio de 1 m^2 de revestimiento lateral es de 1 €, y 1 m^2 de revestimiento del fondo cuesta 2 €. Halla el coste mínimo del depósito.

131. Se desea construir un tanque de acero con forma de cilindro recto y semiesferas en los extremos para almacenar gas propano. El coste del material de chapado de la parte cilíndrica es de 10 €/m^2, y para los extremos (semiesferas) el coste del material es de 20 €/m^2. ¿Qué dimensiones minimizan el coste si la capacidad deseada es de 10π m^3?

132. Un campo tiene forma de trapecio rectángulo de bases 240 m y 400 m, y el lado perpendicular a las bases también mide 400 m. Se quiere partir, tal como indica la figura, en dos campos rectangulares. En el mayor se quiere sembrar maíz, con el que se obtiene un beneficio de 0,12 €/m^2, y en el menor se quiere sembrar trigo, con el que se obtiene un beneficio de 0,10 €/m^2. Determina las dimensiones de cada uno de los campos para que el beneficio sea máximo, y calcúlalo.