

2º BACHILLERATO A

TEMA 2. DETERMINANTES.

1. Calcula los determinantes de estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Determina el valor de x

$$a) \begin{vmatrix} 4 & 2x \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad b) \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & x & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

3. Calcula los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ calcula $|A|$, $|A^t|$, $|2A|$, $|-A|$

5. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \frac{-2}{3}$ calcula

$$a) \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 5b & 5d \\ 3a & 3c \end{vmatrix}$$

6. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$, calcula $\begin{vmatrix} 3a & b+2a & c-a \\ 3d & e+2d & f-d \\ 3g & h+2g & i-g \end{vmatrix}$

7. Calcula el valor de los siguientes determinantes

$$a) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

8. Determina la matriz adjunta de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 8 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

9. Calcula el valor de los siguientes determinantes

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$$

10. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 12 & 4 & 16 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

11. Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

12. Estudia el rango de las siguientes matrices según los distintos valores del parámetro m

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & m \\ 5 & 1 & m & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 1 \end{pmatrix}$

13. Calcula la inversa de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & -7 \\ -1 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

14. Determina los valores de m para los que las matrices sean invertibles

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ m & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

15. Halla la matriz X $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcula el determinante de las matrices $A, A^t, 2A, A^3, 5A^4$

17. Sabemos que el determinante de una matriz cuadrada A vale 3 y el determinante de la matriz $2A$ vale 48. ¿Cuál es el orden de la matriz A ?

18. Sea A una matriz de orden 3. Sabemos que el determinante de $3A$ vale 54. Calcula el determinante de la matriz A .

19. Sabiendo que el determinante de la matriz M vale 5, halla justificadamente:

- a) El valor del determinante de la matriz M^t
- b) El valor del determinante de la matriz $2M$ si M es de orden 2.
- c) El valor del determinante de la matriz $5M$ si M es de orden 2.
- d) El valor del determinante de la matriz $2M$ si M es de orden 3.
- e) El valor del determinante de la matriz $5M$ si M es de orden 3.
- f) El valor del determinante de la matriz $2M$ si M es de orden 4.

20. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$; calcula sin desarrollarlos, el valor de los siguientes determinantes

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -5 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

21. Siendo $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 8$ halla, sin desarrollar

$$a) \begin{vmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} a-3b & b \\ c-3d & d \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} c & d \\ a+2c & b+2d \end{vmatrix}$$

22. Si M es una matriz cuadrada cuyo determinante vale 6. ¿Cuánto vale el determinante de M^3 y el de $2M$?

23. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$, calcula el valor de los siguientes determinantes,

$$a) \begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$$

24. Resuelve estas ecuaciones:

$$a) \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x-1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} x & x+2 & x-1 \\ x & x+4 & x-3 \\ x & x+6 & x-5 \end{vmatrix} = -10 \quad c) \begin{vmatrix} x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1-7x$$

25. A una matriz M de orden 2 cuyo determinante vale 3 se le han realizado las siguientes transformaciones:

- Hemos multiplicado por 4 a la matriz.
 - Hemos intercambiado las columnas entre sí.
 - Hemos dividido entre 2 los elementos de la segunda fila.
- Si llamamos P a la nueva matriz obtenida, calcula el determinante de P.

26. Halla el valor de los siguientes determinantes

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

27. Halla el valor del determinante en función de a

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

28. Calcula el valor del determinante de A

$$A = \begin{pmatrix} 3a & a & a & a \\ a & 3a & a & a \\ a & a & 3a & a \\ a & a & a & 3a \end{pmatrix}$$

29. Comprueba que la ecuación tiene solo tres soluciones sin necesidad de calcular el determinante, e indica cuáles son:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -3 & 4 \\ x^2 & 4 & 9 & 16 \\ x^3 & 8 & -27 & 64 \end{vmatrix} = 0$$

30. Determina los valores de a para los que el rango de la siguiente matriz es 2

$$\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix}$$

31. Determina el rango de cada matriz en función del parámetro a

$$a) \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} a+1 & 1 & -2 \\ 2a+1 & a+1 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 2a & -1 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

32. Halla las matrices inversas de:

$$a) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

33. Sean A , B , C tres matrices cuadradas tales que $|A| = 5$, $|B| = 4$, $|C| = 2$. Deduce razonadamente el valor de los siguientes determinantes:

$$a) |A^t| \quad b) |B^{-1}| \quad c) |AB| \quad d) |A^{-1}B| \quad e) |(BC)^{-1}| \quad f) |C^{-1}B^{-1}|$$

34. ¿Para qué valores del parámetro a la matriz no tiene inversa? Calcula la matriz inversa cuando $a=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

35. Dadas $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ obtén de forma razonada el valor de estos determinantes

$$a) |A + B^{-1} \cdot A| \quad b) |A^3 \cdot B^{-1}|$$

36. ¿Para qué valores del parámetro a la matriz no tiene inversa? Calcula la matriz inversa cuando $a=2$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

37. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$

- Calcula los valores de a para los cuales no existe la matriz inversa de A .
- Para $x=2$, hallar la matriz $B = a^{-1} \cdot (A^t)^2$
- Para $x=2$ hallar una matriz X que satisfaga la ecuación matricial $AX - A^2 = A^t$

38. Sean las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

- Obtén el rango de la matriz A .
- Estudia en función de m el rango de la matriz B .

- c) Determina los valores de m para los que la matriz B no es invertible.
 d) Para $m = -1$, determina la matriz X que verifica la ecuación $B \cdot X \cdot B = A$

39. Sea A una matriz de orden 3, cuyo determinante vale 6, siendo C_1, C_2, C_3 sus columnas, calcula:

- a) $|B| = |5C_2 - 3C_3 + C_1, 7C_2 + 2C_3, -4C_1 - 6C_2|$
 b) $|B^{-1}|$
 c) $|5B|$
 d) $|B^4|$

40. Demuestra, sin desarrollar que los siguientes determinantes valen 0.

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 5 & 4 & -10 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 9 & 14 & 3 \end{vmatrix}$$

41. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b & e & f \end{vmatrix} = 2$ calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ a+d & b+e & c+f \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix}$

42. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix}$ encuentra dos matrices C y D tales que:
 $CA = B$; $DB = A$.

43. Calcula el valor de X que verifica $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix}$

44. Considera la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & m^2 - 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$

- a) Determina los valores para los que la matriz A es invertible.
 b) Para $m=1$ determina el determinante de la matriz $6 \cdot A^{-1}$
 c) Para $m=1$, encuentra una matriz X que verifica la ecuación $XA=B$ donde $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$