TEMA 7. 2º BACH

1. Sea la función $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$. ¿Se puede afirmar que la función toma todos los valores del intervalo [14,24]? (1,5 puntos)
2. Calcula los siguientes límites:

   a. $\lim_{x\to\infty} \frac{7^x+3^x}{8^x+2^x}$ b. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{7x^2+3x}{2x+7x^2-1}\right)^{\frac{2}{x-2}}$ c. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right)$

   d. Calcula el valor de a para que $\lim_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2 - ax + 1}) = 2$ (2 puntos)

3. Calcula las asíntotas de la siguiente función. $\begin{cases} \frac{2x+8}{x+2} & si\ x \le 1 \\ \frac{x^2+5}{x-2} & si\ x > 1 \end{cases}$ (2 puntos)
4. Estudia la continuidad de la siguiente función y si las hay, di de qué tipo son las discontinuidades.

   $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-2}{x+2} & si\ x < -1 \\ x^2 + 2x - 4 & si\ -1 \le x < 1 \\ |x-3| & si\ x \ge 1 \end{cases}$ (2 puntos)

5. Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, demuestra que existe algún punto en el intervalo $[1,10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.(1,5 puntos)
6. Calcula el valor de k∈ ℝ para el cual: $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+kx}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2}{x+1}} = \sqrt{e}$ (1 punto)

CONTROL TEMA 7

① $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

(1,5) $3x^2 - 5x + 2 = 14 \rightarrow x_1 = 3$, $\quad x_2 = -\frac{4}{3}$

$3x^2 - 5x + 2 = 24 \rightarrow x_1 = \frac{11}{3}$, $\quad x_2 = -2$

f cont en $[-2, 3]$ por ser pol.

$\underset{24}{f(-2)} < m < \underset{14}{f(3)}$ $\xrightarrow{TVI}$ $\exists c \in (-2, 3) \,/\, f(c) = m$

f cont en $[-\frac{4}{3}, \frac{11}{3}]$ por ser pol.

$\underset{14}{f(-\frac{4}{3})} > m > f(\frac{11}{3})$ $\xrightarrow{TVI}$ $\exists c \in (-\frac{4}{3}, \frac{11}{3}) \,/\, f(c) = m$

Valen los dos intervalos.

② (2)

a) 0,5 $\lim_{x \to \infty} \frac{7^x + 3^x}{8^x + 2^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^x + \left(\frac{3}{8}\right)^x}{1 + \left(\frac{2}{8}\right)^x} = \frac{0+0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$

b) 0,5 $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{7x^2 + 3x}{2x + 7x^2 - 1}\right)^{\frac{2}{x-2}} = 1^0 = 1$

c) no $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1 - \log x}{(x-1)\log x}$ NO.

(ESTE APARTADO NO LO PODÉIS HACER, ESTÁ ANULADO DEL EXAMEN)

d) 1 $\lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - ax + 1}\right) = 2$

$\lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - ax + 1}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - ax + 1}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - ax + 1}\right)}{x + \sqrt{x^2 - ax + 1}} =$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - (x^2 - ax + 1)}{x + \sqrt{x^2 - ax + 1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax - 1}{x + \sqrt{x^2 - ax + 1}} =$

Para que sea un número deben ser del mismo grado. $a \neq 0$

$= \frac{a}{1+1} = \frac{a}{2} = 2 \rightarrow a = 4$

③ (2)

$f(x) = \begin{cases} ① \; \frac{2x + 8}{x + 2} & \text{si } x \leq 1 \\ ② \; \frac{x^2 + 5}{x - 2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Dom $(-\infty, -2) \cup (-2, 1]$

Dom $(1, 2) \cup (2, +\infty)$

① AV $\lim_{x \to -2} \frac{2x + 8}{x + 2} = \frac{4}{0} = \pm\infty \rightarrow x = -2$

AH $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 8}{x + 2} = \lim_{-x \to +\infty} \frac{-2x + 8}{-x + 2} = 2 \quad y = 2$

AO No tiene, porque hay AH

(2) AV $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+5}{x-2} = \frac{9}{0} = \pm\infty \rightarrow x=2$

AH $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5}{x-2} = +\infty$ $\nexists$

AO $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5}{x^2-2x} = 1$

$n = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2+5}{x-2} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+5}{x-2} = 2$

$y = x+2$

(4) (2)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x-2}{x+2} & \text{si } x<-1 \\ x^2+2x-4 & \text{si } -1\le x<1 \\ |x-3| & \text{si } x\geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{3x-2}{x+2} & \text{si } x<-1 \\ x^2+2x-4 & \text{si } -1\le x<1 \\ -x+3 & \text{si } 1\le x<3 \\ x-3 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$$

Disc. evitable $x=-2$

Cont. polin.

Cont. polin.

Cont polin

$x-3$ si $x-3\geq 0 \rightarrow x\geq 3$

$-x+3$ si $x-3<0 \rightarrow x<3$

Discontinuidad evitable en $x=-2$ porque $-2 \notin \text{Dom} f$ / $\nexists f(-2)$

En $x=-1$

$\lim_{x\to-1^-} \frac{3x-2}{x+2} = \frac{-5}{1} = -5$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad //$

$\lim_{x\to-1^+} x^2+2x-4 = -5$

Continua en $x=-1$

En $x=1$.

$\lim_{x\to1^-} x^2+2x-4 = -1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \#$

$\lim_{x\to1^+} -x+3 = 2$

Disc. inevitable de salto finito en $x=1$

En $x=3$

Cont por ser de valor absoluto.

(5) (1,5) $f(x) = x^3+3x^2-1$, $g(x)=6x$

$x^3+3x^2-1 = 6x \longrightarrow x^3+3x^2-6x-1 = h(x)$

$h(x)$ cont $[1,10]$ por ser polinómica

$h(1) = -3 < 0$

$h(10) = 1239 > 0$

$h(1)\cdot h(10) < 0$

$\xrightarrow{\text{T. Bolzano}} \exists c \in (1,10) / f(c) = 0$

(6) (1)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+kx}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2}{x+1}} = [1^\infty] = e^{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+kx}{x^2-1} - 1\right]\cdot\frac{x^2}{x+1}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+kx-\cancel{x^2}+1}{x^2-1}\cdot\frac{x^2}{x+1}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{(kx+1)x^2}{(x^2-1)(x+1)}} = e^{\frac{k}{1}} = \sqrt{e} = e^{1/2}$$

$\frac{k}{1} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{k=\frac{1}{2}}$