3. Análisis de funciones racionales

Piensa y calcula

Halla mentalmente las raíces del denominador de la función $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

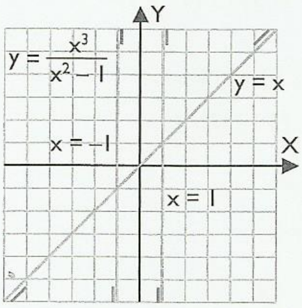
3.1. Modelo de función racional

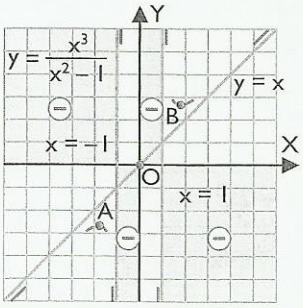
Asíntotas de funciones racionales

- Tiene tantas asíntotas verticales como raíces reales distintas tenga el denominador que no lo sean del numerador.
- Tiene una asíntota horizontal si el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador.
- Tiene una asíntota oblicua si el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -x^3 + x & x \\ \hline x & \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x^2 - 1} = x + \frac{x}{x^2 - 1}$$





2 Ejercicio resuelto

Analiza y representa la función $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

Derivadas: $y' = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$, $y'' = \dfrac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$, $y''' = -\dfrac{6x^4 + 36x^2 + 6}{(x^2 - 1)^4}$

1. **Tipo de función:** racional.
2. **Dominio:** por ser una función racional, hay que excluir las raíces del denominador: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$
   $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. **Continuidad:** es discontinua en $x = -1$, $x = 1$, donde tiene discontinuidades de 1ª especie de salto infinito.
4. **Periodicidad:** no es periódica. Las funciones racionales nunca lo son.
5. **Simetrías:** $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{-x^3}{x^2 - 1} = -\dfrac{x^3}{x^2 - 1}$
   Se observa que $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ función impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. **Asíntotas:**
   - Verticales: son las raíces del denominador, $x = -1$, $x = 1$

   Posición de la curva respecto de las asíntotas verticales:

   $$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{(-1^-)^3}{(-1^-)^2 - 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty;\quad \lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{(-1^+)^3}{(-1^+)^2 - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

   $$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{(1^-)^3}{(1^-)^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty;\quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{(1^+)^3}{(1^+)^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x$

   Posición de la curva respecto de la asíntota oblicua.

   $$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-\infty}{(-\infty)^2 - 1} = 0^- \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{+\infty}{(+\infty)^2 - 1} = 0^+$$

   La curva está debajo de la asíntota La curva está encima de la asíntota
7. **Corte con los ejes:**
   - **Eje X:** $x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ raíz triple. Se obtiene el punto O(0, 0)
   - **Eje Y:** el punto O(0, 0)

Signo: Si $x = 2 \Rightarrow f(2) = \dfrac{2^3}{2^2 - 1} = \dfrac{8}{3} > 0\ (+)$

f(x)	–		+	–		+
x		–1		0	1	