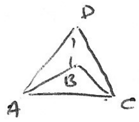
**TEMA 4. 2º BACHILLERATO A**

1. Calcula el área y el volumen del tetraedro de vértices A(-2,3,-1), B(5,0,-3), C(5,-2,7), D(-4,-3,0) (2 puntos)
2. Dados los vectores $\vec{u} = (-3,5,-1)$, $\vec{v} = (-2,5,-4)$ . Calcula:
    a. Los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$
    b. El producto escalar y vectorial de esos dos vectores
    c. El ángulo que forman y La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$
    d. El valor de m para que el vector (1,m,-3) sea ortogonal a $\vec{u}$
    e. Un vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$
    f. El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (3 puntos)
3. Calcula el valor de k para que el volumen del paralelepípedo definido por los puntos A(3,2,-1), B(-1,3,1), C(k,-4,0) y D(-1,0,-1) sea igual a 15 unidades cúbicas. (1,5 punto)
4. El volumen de un tetraedro es de 8 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los siguientes puntos A(-2,3,-1), B(-3,1,-1) y C(-2,-1,4) halla las coordenadas del vértice D sabiendo que está en el eje Y. (2 puntos)
5. Halla las coordenadas del vector $\vec{a}$(x,y,z), que es perpendicular a los vectores $\vec{u}(3,-3,-1)$ y $\vec{v}(-1,2,-4)$ y que $\vec{a} \cdot \vec{w} = -5$ siendo $\vec{w}\ (1,-1,1)$ (1,5 puntos)

REC T4

① $A(-2,3,-1)$ $B(5,0,-3)$ $C(5,-2,7)$ $D(-4,-3,0)$




$\vec{AB}(7,-3,-2)$

$\vec{AC}(7,-5,8)$

$\vec{AD}(-2,-6,1)$

$$V = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 7 & -5 & 8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{474}{6} = 79\ u^3$$

Área

$$A_1 = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{|-34,-70,-14|}{2} = \frac{79{,}07}{2} = 39{,}53\ u^2$$

$$A_2 = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AD}|}{2} = \frac{|-15,-3,-48|}{2} = \frac{3\sqrt{282}}{2} = 25{,}19\ u^2$$

$$A_3 = \frac{|\vec{AC} \times \vec{AD}|}{2} = \frac{|43,-23,52|}{2} = \frac{11\sqrt{42}}{2} = 35{,}64\ u^2$$

$$A_4 = \frac{|\vec{CB} \times \vec{CD}|}{2} = \frac{|24,-90,-18|}{2} = \frac{30\sqrt{10}}{2} = 47{,}43\ u^2$$

$$A_T = 147{,}79\ u^2$$

② $\vec{u}(-3,5,-1)$ , $\vec{v}(-2,5,-4)$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{9+25+1} = \sqrt{35}$

$|\vec{v}| = \sqrt{4+25+16} = \sqrt{45}$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-3,5,-1)(-2,5,-4) = 6+25+4 = 35$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 5 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = (-15,-10,-5)$$

c) $\cos(\widehat{u,v}) = \dfrac{35}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{45}} \longrightarrow \alpha = 28{,}12°$

$$\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{35}{\sqrt{45}} = \frac{7\sqrt{5}}{3}$$

d) $(-3,5,-1)(1,m,-3) = 0$

$-3+5m+3 = 0 \longrightarrow m = 0$

e) Un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\vec{u}\times\vec{v}$

Para que sea unitario

$|\vec{w}| = \sqrt{15^2+10^2+5^2} = \sqrt{350} = 5\sqrt{14}$

$$\vec{w} = \left(\frac{-15}{350}, \frac{-10}{350}, \frac{-5}{350}\right) = \left(-\frac{3}{70}, -\frac{1}{35}, -\frac{1}{70}\right)$$

f) $|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{15^2+10^2+5^2} = \sqrt{350}\ u^2 = 5\sqrt{14}\ u^2$

(3) $\vec{AB} = (-4, 1, 2)$
$\vec{AC} = (k-3, -6, 1)$
$\vec{AD} = (-4, -2, 0)$

$$V = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ k-3 & -6 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 15$$

$-4(k-3) - 4 - 48 - 8 = \pm 15$
$-4k + 12 - 60 = \pm 15$
$-4k - 48 = \pm 15$

$-4k - 48 = 15 \rightarrow k = -\frac{63}{4}$
$-4k - 48 = -15 \rightarrow k = \frac{-33}{4}$

$C_1\left(-\frac{63}{4}, -4, 0\right)$ , $C_2\left(\frac{33}{4}, -4, 0\right)$

(4) $A(-2, 3, -1)$ $\quad D(0, y, 0)$
$B(-3, 1, -1)$
$C(-2, -1, 4)$

$\vec{DA}\ (2, y-3, 1)$
$\vec{DB}\ (3, y-1, 1)$
$\vec{DC}\ (2, y+1, -4)$

$$V = \frac{\begin{vmatrix} 2 & y-3 & 1 \\ 3 & y-1 & 1 \\ 2 & y+1 & -4 \end{vmatrix}}{6} = 8 \longrightarrow$$

$-8(y-1) + 3(y+1) + 2(y-3) - 2(y-1) - 2(y+1) + 12(y-3) =$
$-10(y-1) + (y+1) + 14(y-3) = -10y + y + 14y + 10 + 1 - 42 = 5y - 31$

$V = \frac{5y - 31}{6} = \pm 8 \Longrightarrow$

$5y - 31 = 48 \longrightarrow y = \frac{79}{5} \quad D_1\left(0, \frac{79}{5}, 0\right)$
$5y - 31 = -48 \longrightarrow y = -\frac{17}{5} \quad D_2\left(0, -\frac{17}{5}, 0\right)$

(5) $\vec{a} \cdot \vec{u} = 0 \quad (x, y, z)(3, -3, -1) = 3x - 3y - z = 0$
$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0 \quad (x, y, z)(-1, 2, -4) = -x + 2y - 4z = 0$
$\vec{a} \cdot \vec{w} = -5 \quad (x, y, z)(1, -1, 1) = x - y + z = -5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$|A| = 6 - 1 + \cancel{12} + 2 - \cancel{12} - 3 = 4$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-70}{4} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-65}{4} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-15}{4}$$

$\vec{a}\left(-\frac{70}{4}, -\frac{65}{4}, -\frac{15}{4}\right)$

OTRA FORMA
$(\vec{u} \times \vec{v}) = (14, 13, 3) \Longrightarrow \vec{a} = k(14, 13, 3)$
$k(14, 13, 3) \cdot (1, -1, 1) = -5 \Longrightarrow k = -5/4$
Luego $\vec{a} = -\frac{5}{4}(14, 13, 3) = \left(-\frac{70}{4}, -\frac{65}{4}, -\frac{15}{4}\right)$