TEMA 3 2ºA

1. Un estudiante ha gastado un total de 48 euros en la compara de una mochila, un bolígrafo y un libro. Si el precio de la mochila se redujera a la sexta parte, el del bolígrafo a la tercera parte y el del libro a la séptima parte de sus respectivos precios iniciales, el estudiante pagaría un total de 8 euros por ellos. Calcular el precio de la mochila, del bolígrafo y del libro, sabiendo que la mochila cuesta lo mismo que el total del bolígrafo y el libro.

2. Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=a \\ ay+z=1 \\ ax+y+az=a \end{array}\right\}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.
b) Resuélvase el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para a=3.

3. Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real m:

$$\left.\begin{array}{r} mx+y-3z=0 \\ -x+y+z=0 \\ x+my-mz=0 \end{array}\right\}$$

a) Discutir el sistema en función del parámetro m.
b) Resolver cuando sea posible.

4. Dado el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 2x+ay=3 \\ x+ay=0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valores de a el sistema es compatible?
b) Si a=-1, ¿tiene solución el sistema? En caso afirmativo, calcúlala.
c) Resuelve para el caso en que sea compatible.

TEMA 3 2ºA

(1) x = € mochila
y = € bolígrafo
z = € libro.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=48 \\ \frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{7}=8 \\ x=y+z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y+z=48 \\ x-y-z=0 \\ 21x+42y+18z=1008 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 48 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 21 & 42 & 18 & 1008 \end{array}\right) \qquad |A|=(-18+42-21)-(-21-42+18)=3-(-45)=48$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 48 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1008 & 42 & 18 \end{vmatrix}}{48}=\frac{-1872-(-3024)}{48}=24$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 48 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 21 & 1008 & 18 \end{vmatrix}}{48}=\frac{(1008-1008)-(-1008+864)}{48}=\frac{144}{48}=3$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 48 \\ 1 & -1 & 0 \\ 21 & 42 & 1008 \end{vmatrix}}{48}=\frac{1008-(-1008+1008)}{48}=21$$

24 € la mochila, 3 € el bolígrafo y 21 € el libro

(2) $$\left.\begin{array}{l} ax+y+z=a \\ ay+z=1 \\ ax+y+az=a \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a & a \end{array}\right)$$

$|A|=a^3+a-a^2-a=0$
$a^3-a^2=0 \Rightarrow a^2(a-1)=0$ → $a=0$, $a=1$

(1) a) Si $a\neq 0,\ a\neq 1$, rg $A=3=$ rg $A^*=$ nº inc. SCD

Si $a=0$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \quad \text{rg } A=2$$

$$|A^*|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1 \Rightarrow \text{rg } A^*=3$$

rg $A=2\neq$ rg $A^*=3$
$\Rightarrow$ SI

Si $a=1$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \quad \text{rg } A=2$$

rg $A=2=$ rg $A^*<$ nº inc.
$\Rightarrow$ SCI

$$|A^*|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{rg } A^*=2$$

(0,75) b) Tiene ∞ soluciones si $a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{array}\right) \xrightarrow{z=\lambda} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{array}\right)$$

$|B|=1$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix}}{1}=0 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}}{1}=1-\lambda$$

Solución $(0,\ 1-\lambda,\ \lambda)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$

c) Para $a=3$ SCD

(0,75)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \qquad |A| = 27-9 = 18$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{18} = \frac{(27+1+3)-(9+3+3)}{18} = \frac{31-15}{18} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{18} = \frac{(9+9)-(3+9)}{18} = \frac{18-12}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{18} = \frac{30-(27+3)}{18} = 0$$

Solución $\left(\frac{8}{9}, \frac{1}{3}, 0\right)$

3) $\left.\begin{array}{l} mx+y-3z=0 \\ -x+y+z=0 \\ x+my-mz=0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & -m & 0 \end{array}\right)$ $|A| = -m^2+3m+1+3-m^2-m =$

$= -2m^2+2m+4 = 0$

$$m = \frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{-4} = \frac{-2\pm 6}{-4} = \begin{cases} \frac{-8}{-4} = 2 \\ \frac{4}{-4} = -1 \end{cases}$$

a) Si $m\neq -1$, $m\neq 2$ $rg\, A = 3 = rg\, A^* =$ nº inc. $\Rightarrow$ SCD

1 Si $m=-1$, $m=2$ por ser homogéneo $rg\, A = 2 = rg\, A^* <$ nº inc $\Rightarrow$ SCI

b) Resolver

0,5 Si $m\neq -1$, $m\neq 2$ $\Rightarrow$ SCD Solución $(0,0,0)$

Si $m=-1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{x=\lambda} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{array}\right)$

$|B| = 4$

0,5

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{\lambda+3\lambda}{4} = \frac{4\lambda}{4} = \lambda \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}}{4} = 0$$

Solución $(\lambda, \lambda, 0)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Si $m=2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z=\lambda} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3\lambda \\ -1 & 1 & -\lambda \end{array}\right)$

$|B| = 3$

0,5

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3\lambda+\lambda}{3} = \frac{4\lambda}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3\lambda \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}}{3} = \frac{-2\lambda+3\lambda}{3} = \frac{\lambda}{3}$$

Solución $\left(\frac{4\lambda}{3}, \frac{\lambda}{3}, \lambda\right)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

(4) $\left.\begin{array}{l} 3x-2y=1 \\ 2x+ay=3 \\ x+ay=0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & a & 0 \end{array}\right)$ $|A| = 3a+4=0 \rightarrow a=-\frac{4}{3}$

a) Si $a=-4/3$ $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -4/3 & 3 \\ 1 & -4/3 & 0 \end{array}\right)$ $|A^*| = \left(-\frac{8}{3}-6\right)-\left(-\frac{4}{3}-\frac{36}{3}\right) = -\frac{26}{3}+\frac{40}{3}=\frac{14}{3}\neq 0$

$rg\ A^* = 3$

0,75 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4/3 \\ 1 & -4/3 \end{vmatrix} = -4/3 \neq 0$ $rg\ A=2$

$rg\ A = 2 \neq rg\ A^* = 3$ SI

Si $a\neq -4/3$ $rg\ A=2$

0,75 $|A^*| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 2a-6-a-9a=-8a-6=0 \rightarrow a=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$

Si $a\neq -\frac{3}{4}$ $rg\ A^*=3$

Si $a=-\frac{3}{4}$ $rg\ A^*=2$

Si $a=-3/4$ $rg\ A=2=rg\ A^*=$ nº inc. SCD

Si $a\neq -3/4$ y $-4/3$ $rg\ A=2\neq rg\ A^*=3$ SI

0,5 b) Si $a=-1$ No tiene solución.

0,5 c) Si $a=-3/4$

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3/4 & 3 \\ \cancel{1} & \cancel{-3/4} & \cancel{0} \end{array}\right)$ $|A| = -\frac{9}{4}+4=\frac{7}{4}$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3/4 \end{vmatrix}}{7/4} = \dfrac{-3/4+6}{7/4} = \dfrac{21/4}{7/4} = 3$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{7/4} = \dfrac{9-2}{7/4} = \dfrac{7}{7/4} = 4.$