TEMA 4 y 5. 2º BACHILLERATO A

1. Dados los vectores $\vec{u} = (6,-2,1),\ \vec{v} = (-5,-4,-1)$. Calcula:
   a. El ángulo que forman y La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$
   b. Un vector unitario ortogonal a $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ (1 punto)
2. El volumen de un tetraedro es de 12 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los siguientes puntos A(-1,-5,-1), B(2,1,-1) y C(3,5,-4) halla las coordenadas del vértice D sabiendo que está en el eje X. (1,5 puntos)
3. Halla las coordenadas del vector $\vec{a}$(x,y,z), que es perpendicular a los vectores $\vec{u}(-2,-3,8)$ y $\vec{v}(-1,1,-2)$ y que $\vec{a}\cdot\vec{w}$= - 10 siendo $\vec{w}$ $(2,-3,2)$ (1,5 puntos)
4. Sean las rectas $r: \frac{2-2x}{-2} = y-2 = \frac{3z-3}{6}$, s:$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$
   a. Estudia la posición relativa de ambas rectas.
   b. Determina la recta que pasa por el punto de corte de las dos rectas y es perpendicular a ambas. (1,5 puntos)
5. Se considera el punto A (4, -1, -2) y la recta r: $\begin{cases} -3x+2y=0 \\ 2y-z-5=0 \end{cases}$

   a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.
   b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r. (1,5 puntos)

6. Consideramos la recta r: $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ 3x-4z=7 \end{cases}$ $y\ el\ plano\ \pi: x-2y+4z=6$

   a) Calcula el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano dado.
   b) Calcular la posición relativa de la recta r y el plano π. Si son secantes, averigua el punto de intersección.(1,5 puntos)

7. Se considera el punto P (-3,0,-2), el plano $\pi\ : 3x-2z-5=0$ y la recta siguiente

   r: $x-3 = -y+2 = \frac{3-z}{-2}$. Calcula los puntos R de la recta, de manera que la recta que pasa por P y R es paralela al plano dado. (1,5 puntos)

TEMAS 4 y 5

① $\vec{u}(6,-2,1)$, $\vec{v}(-5,-4,-1)$

(1)

a) $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{|-23|}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{42}} = 0{,}55 \rightarrow \alpha = 56{,}34°$

$\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u} = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \dfrac{23}{\sqrt{42}} = \dfrac{23\sqrt{42}}{42}$

b) Ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v} \Rightarrow \vec{w} = \vec{u}\times\vec{w}$

$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -2 & 1 \\ -5 & -4 & -1 \end{vmatrix} = (6,1,-34)$

$|\vec{w}| = \sqrt{6^2+1^2+(-34)^2} = \sqrt{1193}$

Un vector unitario sera $\vec{w}_1 = \left(\dfrac{6}{\sqrt{1193}}, \dfrac{1}{\sqrt{1193}}, \dfrac{-34}{\sqrt{1193}}\right)$

② $A(-1,-5,-1)$, $B(2,1,-1)$, $C(3,5,-4)$, $D(x,0,0)$

$\vec{DA}\ (x+1,5,1)$

$\vec{DB}\ (x-2,-1,1)$

$\vec{DC}\ (x-3,-5,4)$

$V = \dfrac{\begin{vmatrix} x+1 & 5 & 1 \\ x-2 & -1 & 1 \\ x-3 & -5 & 4 \end{vmatrix}}{6} = 12u^3$

$|(x+1).1 - 25(x-2) + 6(x-3)| = 72$

$|x+1-25x+50+6x-18| = 72$

$|-18x+33| = 72 \longrightarrow -18x+33 = \pm 72$

$-18x+33 = 72 \longrightarrow x = -\dfrac{13}{6}$

$-18x+33 = -72 \longrightarrow x = \dfrac{35}{6}$

$D_1\left(-\dfrac{13}{6},0,0\right)$, $D_2\left(\dfrac{35}{6},0,0\right)$

③ $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -3 & 8 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2,-12,-5) \longrightarrow \vec{a} = k(-2,-12,-5)$

$\vec{a}\cdot\vec{w} = -10 \Rightarrow k(-2,-12,-5)(2,-3,2) = -10 \Rightarrow k(-4+36-10) = -10$

$\Rightarrow k\cdot 22 = -10 \Rightarrow k = \dfrac{-10}{22} = \dfrac{-5}{11}$

Luego $\vec{a} = -\dfrac{5}{11}(-2,-12,-5) = \left(\dfrac{10}{11}, \dfrac{60}{11}, \dfrac{25}{11}\right)$

④ $r: \dfrac{2-2x}{-2} = y-2 = \dfrac{3z-3}{6} \Rightarrow \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ $\quad \vec{v}_r(1,1,2)$ $\quad R(1,2,1)$

$s: \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{2} \Rightarrow \vec{v}_s(-2,-1,2)$, $S(3,3,-1)$ $\quad \Rightarrow \vec{RS}(2,1,-2)$

a) Posición relativa $\vec{v}_r\times\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (4,-6,1) \neq 0$

$[\vec{RS},\vec{v}_r,\vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ r y s son secantes.

b) $r: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2+\lambda \\ t = 1+2\lambda \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 3-2\mu \\ y = 3-\mu \\ z = -1+2\mu \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 1+\lambda = 3-2\mu \\ 2+\lambda = 3-\mu \\ 1+2\lambda = -1-2\mu \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda+2\mu = 2 \\ \lambda+\mu = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = 0 \end{cases}$

Punto de corte $Q(1,2,1)$

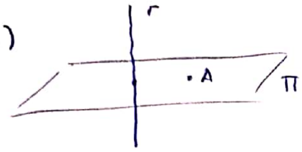
$\vec{v_t} = \vec{v_r} \times \vec{v_s} = (4,-6,1)$

Recta perpendicular a las dos que pasa por Q: $t: \{\vec{v_t}, Q\}$

$t: \begin{cases} x = 1+4\lambda \\ y = 2-6\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$

(5) $A(4,-1,-2)$ $\quad r: \begin{cases} -3x+2y=0 \\ 2y-z-5=0 \end{cases}$

a)



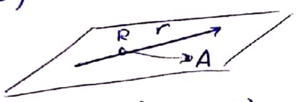
$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2,-3,-6)$

$\vec{v_r} = \vec{n} = (-2,-3,-6)$

$\pi: -2x-3y-6z+D=0$

$A \in \pi: -8+3+12+D=0 \Rightarrow D=-7$ $\quad \Rightarrow \pi: -2x-3y-6z-7=0$ $\quad \boxed{\pi: 2x+3y+6z+7=0}$

b)



$R(0,0,-5)$

$\vec{v_r}\ (-2,-3,-6)$

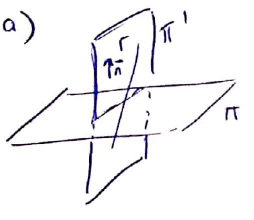
$\vec{AR} = (-4,1,-3)$

$\pi: \begin{vmatrix} x-4 & y+1 & z+2 \\ -2 & -3 & -6 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-4)15 - (y+1)(-18) + (z+2)(-14) = 0$

$\boxed{\pi: 15x+18y-14z-70=0}$

(6) $r: \begin{cases} 2x-y=-3 \\ 3x-4z=7 \end{cases}$ $\quad \pi: x-2y+4z-6=0$

a)



$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (4,8,3)$

$R(0,3,-\frac{7}{4})$

$\vec{n}\ (1,-2,4)$

$\pi: \begin{vmatrix} x & y-3 & z+\frac{7}{4} \\ 4 & 8 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\boxed{\pi: 38x-13y-16z+11=0}$

b) $\vec{v_r} = (4,8,3)$

$\vec{n} = (1,-2,4)$

$\vec{v_r} \cdot \vec{n} = (4,8,3)(1,-2,4) = 0$ Son paralelas

$R \overset{?}{\in} \pi \Rightarrow 0-6-\frac{28}{4}-6 = -19 \neq 0$

$R \notin \pi$

Por lo tanto, no hay punto de intersección.

(7) $r: x-3 = -y+2 = \frac{3-z}{-2} \Rightarrow x-3 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ $\quad \vec{v_r}(1,-1,2)$, $S(3,2,3) \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = 3+2\lambda \end{cases}$

$R(3+\lambda, 2-\lambda, 3+2\lambda) \Rightarrow \vec{PR}\ (6+\lambda, 2-\lambda, 5+2\lambda)$

Si $\vec{PR}$ es paralelo al plano $\pi: \vec{n}(3,0,-2) \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{PR} = 0$

$(3,0,-2)(6+\lambda, 2-\lambda, 5+2\lambda) = 8-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 8$ Luego $R(11,-6,19)$