ACTIVIDADES

Ángulos

38. Considera las rectas que se cortan en el punto $P(1, 0, -1)$ y cuyos vectores directores son $\vec{u} = (2, 1, -2)$ y $\vec{v} = (2, -2, -1)$, respectivamente. Determina el ángulo que forman al cortarse. 63,61°

39. Determina los ángulos que describen las siguientes parejas de rectas.

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{array}\right\}$ 67,73°

$s: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z+1}{2}$

b) $r: \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-1}{2}$ 0°

$s: \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$

c) $r: \left.\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 2 - 4\lambda \\ z = 7 + 14\lambda \end{array}\right\}$ 90°

$s: \left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 6 \\ -x + 4z = 0 \end{array}\right\}$

d) $r: \left.\begin{array}{r} 2x - y + 3z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 5 \end{array}\right\}$ 17,71°

$s: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$

40. Dos rectas que se cortan en el punto $P(5, -2, 7)$ y cuyos vectores directores son $\vec{u} = (0, 1, 1)$ y $\vec{v} = (a, 1, 0)$, respectivamente, forman un ángulo de 60°. Determina los posibles valores del parámetro a. $a = \pm 1$

41. Clasifica en agudo, obtuso o recto el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ según el signo de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

42. ¿Para qué valores de k los vectores $\vec{a} = (k, 3, 5)$ y $\vec{b} = (2, -4, -2)$ forman un ángulo obtuso?

43. Decide si el triángulo de vértices $A(-2, 4, 0)$, $B(3, -3, 1)$ y $C(6, -2, 4)$ es rectángulo, acutángulo u obtusángulo. Obtusángulo

44. Calcula el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$, sabiendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$ y que $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$. 140,43°

45. Determina el ángulo formado entre la recta $r: \dfrac{x}{2} = y = z$ y el plano $\pi: 2x - y - z = 0$.

46. Calcula el ángulo que forman estas parejas de rectas y planos.

a) $\pi: x - 2y + 3z = 8$ $\quad r: \left.\begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array}\right\}$ 40,89°

b) $\pi: x - 3y - z = 6$ $\quad r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{-4}$ 0°

c) $\pi: 2x + 2y + 2z = -3$ $\quad r: \left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = 8 \\ -2x + y + z = 4 \end{array}\right\}$ 90°

47. Determina el valor o los valores del parámetro m para que la recta $r: x = \dfrac{y}{m} = -z$ y el plano $\pi: x - z = 0$ formen un ángulo de 30°. $m = \pm\sqrt{6}$

48. Comprueba que los planos $\pi_1: y + 2z = 0$ y $\pi_2: 3y + z = 0$ contienen al eje OX y determina el ángulo que forman.

49. Halla el ángulo que definen estas parejas de planos.

a) $\alpha: 2x - y + 3z = -9$ $\quad \beta: 2x - 2y - 2z = 19$ 90°

b) $\alpha: -x + 5y + 3z = -1$ $\quad \beta: 3x + 5y + 7z = 9$ 37,08°

c) $\alpha: -4x + 12y - 28z = -13$ $\quad \beta: \left.\begin{array}{l} x = -2 + t + 3s \\ y = 2 - 2t + s \\ z = 1 - t \end{array}\right\}$ 0°

50. Estudia la posición relativa entre las rectas r y s. En caso de que sean secantes, determina el ángulo que forman y su punto de intersección.

$r: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{4} = 3 - z$ $\quad s: \left.\begin{array}{r} x + 3y = 2 \\ 2y + z = 5 \end{array}\right\}$

Secantes $(-1, 1, 3)$ 90°

51. Determina la posición relativa entre las siguientes rectas y, si fuese posible, el ángulo que determinan y su punto de intersección.

$r: (2 - \lambda, 3 + \lambda, 1 + \lambda)$ $\quad s: \left.\begin{array}{r} x + y - 5 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{array}\right\}$

Sec $R(1, 4, 2)$ 70,53°

52. Calcula el valor de m para que las rectas r y s sean secantes.

$r: \left.\begin{array}{r} x + y + z + 3 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{array}\right\}$ $\quad s: (-1 + 2\lambda, -1 + \lambda, m - 2\lambda)$

Para ese valor de m, halla el ángulo que forman r y s y el punto de intersección entre ellas.

$m = -1$ 45° $R(-1, -1, -1)$

53. Considera las siguientes rectas.

$r: \left.\begin{array}{l} x = -2 + t \\ y = 4 - t \\ z = m - 2t \end{array}\right\}$ $\quad s: x = y = z$

a) Estudia la posición relativa de las rectas en función del parámetro m. $m = 7$ Sec $m \neq 7$ cruzan.

b) En caso de que sean secantes para algún valor de m, determina el punto de intersección y el ángulo que forman. $R(1, 1, 1)$ 61,87°

54. Considera la recta $r: \dfrac{x}{3} = \dfrac{2y}{5} = -z$ y el plano $\pi: x + 2y - z - 9 = 0$.

a) Estudia la posición relativa entre la recta y el plano. Sec

b) Determina el ángulo formado por la recta y el plano. 65,7

55. Considera la recta $r: \left.\begin{array}{r} x - 2y + z - 3 = 0 \\ -3x + y - z + 4 = 0 \end{array}\right\}$ y el plano $\pi: ax + y - 2z - 1 = 0$.

a) Comprueba que el punto $A(1, -1, 0)$ pertenece a la recta r. $A \in r$

b) Sabiendo que el punto $A(1, -1, 0)$ también pertenece al plano π, determina el ángulo formado entre ambos.

37,49°

56. Sean la recta y el plano con las siguientes ecuaciones.

$$r: \left(1 + 2\lambda, \frac{\lambda}{2}, a - 3\lambda\right) \qquad \pi: x + 2y + az - 2 = 0$$

a) Determina la posición relativa entre la recta y el plano en función de los valores del parámetro a. $a \neq 1$ sec / $a = 1$ contenida

b) Para $a = 0$, determina el ángulo formado por la recta y el plano. $21{,}63°$

c) Cuando $a = 1$, determina la ecuación del plano perpendicular al dado y que contenga a la recta. $13x - 10y + 7z - 20 = 0$

57. Considera el punto $P(2, 0, 0)$, la recta $r: \frac{x}{3} = y = \frac{z}{-1}$ y el plano $\pi: x + y - z - 5 = 0$.

a) Comprueba que el punto no pertenece a la recta ni al plano. $P \notin r,\ P \notin \pi$

b) Comprueba que la recta y el plano son secantes en un punto, determina ese punto y encuentra el ángulo formado entre ambos. sec, $(3, 1, -1)$ $60{,}5°$

c) Encuentra el ángulo formado por el plano que contiene a la recta r y al punto P con el plano π. $90°$

58. Considera los planos de ecuaciones $\pi_1: ax + y + 2z + 1 = 0$, $\pi_2: -2x + ay + 5z + 1 = 0$ y $\pi_3: 4x - y + az - 2 = 0$. Demuestra que hay un único valor de a para el que los planos son secantes dos a dos y, para ese valor, determina los ángulos formados por cada par de planos. $a = -3$

Proyecciones ortogonales

59. Determina la proyección ortogonal del punto $P(3, 1, 5)$ sobre el eje:

a) OX $(3, 0, 0)$ b) OY $(0, 1, 0)$ c) OZ $(0, 0, 5)$

A partir de los resultados obtenidos, generaliza la proyección ortogonal de un punto cualquiera sobre los ejes de coordenadas.

60. Determina, en cada uno de los casos, la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r:

a) $P(2, 2, 0)$ y $r: (\lambda, -\lambda, 3 + \lambda)$ $(-1, 1, 2)$

b) $P(-1, 3, 1)$ y $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{2} = -z$ $\left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$

c) $P\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ y $r: \begin{cases} 2x - y = 6 \\ x + z = -1 \end{cases}$ $(2, -2, -3)$

d) $P(-3, 0, 1)$ y $r: \begin{cases} x = 10 - 3t \\ y = 2t \\ z = -5 \end{cases}$ $\left(\frac{67}{13}, \frac{42}{13}, -5\right)$

61. Determina, en cada caso, la proyección ortogonal del punto sobre el plano.

a) $P(3, 3, 1)$ y $\pi: x + y + z - 3 = 0$ $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

b) $P\left(1, -\frac{1}{2}, 0\right)$ y $\pi: -3x + 2y - 4z - 25 = 0$ $\left(-2, \frac{3}{2}, -4\right)$

c) $P(2, 0, -1)$ y $\pi: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \beta \\ z = 3\beta - 11 - 2\lambda \end{cases}$ $(0, 3, -2)$

62. Determina la proyección ortogonal del punto $P(-1, 4, -3)$ sobre el plano:

a) OXY $(-1, 4, 0)$ b) OXZ $(-1, 0, -3)$ c) OYZ $(0, 4, -$

A partir del resultado obtenido, generaliza la proyección ortogonal de un punto cualquiera sobre los planos coordenados.

63. Sin calcularlo, deduce cuál de estos puntos es la proyección ortogonal del punto $P(1, 0, 1)$ sobre el plano $\pi: x + y - z - 3 = 0$.

$A(-1, 4, 0)$ $B(0, -1, 2)$ $C(2, 1, 0)$

64. Determina, en cada uno de los casos, la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

a) $r: (2\lambda, -1 + \lambda, 5 - \lambda)$; $\pi: -x + 2y - 3z + 1 = 0$ $\begin{cases} -x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ x - 7y - 5z + 15 = 0 \end{cases}$

b) $r: \frac{x}{-3} = y - 2 = \frac{3 - z}{3}$; $\pi: x - 3y - 2z + 5 = 0$ $\begin{cases} x - 3y - 2z + 5 = 0 \\ -11x - 9y + 8z - 6 = 0 \end{cases}$

c) $r: \begin{cases} -x + 3y - 1 = 0 \\ 2y - z + 4 = 0 \end{cases}$; $\pi: -2x + y - z + 4 = 0$ $\begin{cases} -2x + y - z + 4 = 0 \\ -3x - y + 5z - 23 = 0 \end{cases}$

d) $r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{2} = z$; $\pi: 4x - 4y - 2z - 7 = 0$ $\begin{cases} \frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{2} = z \\ 4x - 4y - 2z - 7 = 0 \end{cases}$

65. Determina la proyección ortogonal de la recta $r: (1 - \lambda, \lambda, -2\lambda)$ sobre el plano:

a) OXY b) OXZ c) OYZ

$(1 - \lambda, \lambda, 0)$ $(1 + \frac{1}{2}\lambda, 0, \lambda)$ $(0, -\frac{1}{2}\lambda,$

66. Determina la proyección ortogonal de cada uno de los ejes de coordenadas sobre el plano de ecuación $\pi: x - y - z + 9 = 0$.

$(-9 + 2\lambda, \lambda, \lambda)$ / $(-\lambda, 9 - 2\lambda, \lambda)$ / $(-\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\lambda, \frac{9}{2}$

67. Dados la recta $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$, el plano $\pi: x - y + 2z + 1 = 0$ y el punto $P(2, 1, -5)$, calcula:

a) La proyección ortogonal del punto P sobre el plano π. $\left(\frac{10}{3}, -\frac{1}{3},\right.$

b) La proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π. $\begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ 7x - 3y - 5z - 24 = 0 \end{cases}$

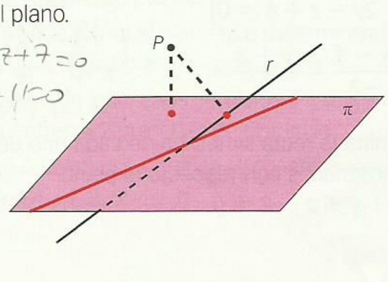
68. Considera el plano $\pi: x + y - 4z + 7 = 0$, la recta $r: \begin{cases} x = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ y el punto $P(3, -2, 1)$.

a) Determina la proyección ortogonal del punto sobre el plano. $\left(\frac{25}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{17}{9}\right)$

b) Determina la proyección ortogonal del punto sobre la recta. $(2, -2, 3)$

c) Determina la proyección ortogonal de la recta sobre el plano.

$\begin{cases} x + y - 4z + 7 = 0 \\ 4x + z - 11 = 0 \end{cases}$



ACTIVIDADES

Simetrías

69. Determina el punto simétrico del punto $P(-2, 3, 1)$ respecto al eje:

a) OX $(-2,-3,-1)$ b) OY $(2,3,-1)$ c) OZ $(2,-3,1)$

A partir del resultado obtenido, generaliza el punto simétrico de un punto cualquiera sobre los ejes de coordenadas.

70. Determina, en cada uno de los casos, el punto simétrico del punto P respecto de la recta r.

a) $P(-1, 2, 3)$ y $r: (-2\lambda, -1+\lambda, 2)$ $(-3,-2,1)$

b) $P(0, -2, 0)$ y $r: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = z - 6$ $\left(-1,-\frac{1}{2},\frac{13}{2}\right)$

c) $P(-1, 2, 13)$ y $r: \left.\begin{array}{r} x-2y=8 \\ -2x+y+z=1 \end{array}\right\}$ $(9,-6,9)$

d) $P\left(2, 2, \dfrac{1}{2}\right)$ y $r: (1-2\lambda, 3+2\lambda, -1-\lambda)$ $\left(\frac{22}{9}, \frac{14}{9}, -\frac{23}{18}\right)$

71. Determina el punto simétrico de $P(2, -1, 0)$ respecto del plano:

a) OXY $(2,-1,0)$ b) OXZ $(2,1,0)$ c) OYZ $(-2,-1,0)$

Saca conclusiones a partir de los resultados que hayas obtenido.

72. Halla el punto simétrico del punto A respecto de la recta r siendo $A(1, 2, 1)$ y $r: x+1 = y-2 = \dfrac{z-3}{4}$. $\left(-\frac{11}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$

73. Determina, en cada uno de los casos, el punto simétrico del punto P respecto del plano π.

a) $P(1, 0, 1)$ y $\pi: 2x - y - 5z - 12 = 0$ $(3,-1,-4)$

b) $P(-1, 1, 0)$ y $\pi: 3x + 2y - 38 = 0$ $(17,13,0)$

c) $P\left(0, \dfrac{1}{2}, -1\right)$ y $\pi: -2y + 5z - 23 = 0$ $(0,-7/2,9)$

74. Encuentra la recta simétrica de la recta de ecuación $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-1}$ respecto del plano:

a) OXY b) OXZ c) OYZ

$r: (0,0,0)+\lambda(2,3,1)$ $s: (0,0,0)+\lambda(2,-3,-1)$ $t: (0,0,0)+\lambda(-2,3,-1)$

75. Determina, en cada uno de los casos, la recta simétrica de la recta r respecto del plano π.

a) $r: (2\lambda, -1+\lambda, 5-\lambda)$ $\pi: -x + 2y - 3z + 1 = 0$

$\left(-\frac{15}{7},\frac{25}{7},-\frac{13}{7}\right)+\lambda(17,1,2)$

b) $r: \dfrac{x}{-3} = y - 2 = \dfrac{3-z}{3}$ $\pi: x - 3y - 2z + 5 = 0$

$(-2,0,-2)+\lambda(6,-2,6)$

c) $r: \left.\begin{array}{r} -x+3y-1=0 \\ 2y-z+4=0 \end{array}\right\}$ $\pi: -2x + y - z + 4 = 0$

$\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{14}{3}\right)+\lambda(-5,10,-1)$

d) $r: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+3}{2} = z$ $\pi: 4x - 4y - 2z - 7 = 0$

$(-1,-1,1)+\lambda(2,-2,-1)$

76. Determina la recta simétrica de cada uno de los ejes de coordenadas con respecto al plano $\pi: -x + y + z - 2 = 0$.

77. Para cada valor de a, los puntos $P(1, 2, 3)$ y $A(0, 1, a)$ son simétricos respecto a un plano.

Halla, de forma razonada, la ecuación de dicho plano. En particular, encuentra el plano para $a = 2$.

78. Escribe las ecuaciones implícitas de una recta con la dirección del vector $(1, -1, 0)$ y que pasa por P', el punto simétrico de $P(0, -2, 0)$ respecto al plano $\pi: x + 3y + z = 5$.

Distancias

79. Calcula la distancia entre los puntos A y B en cada uno de estos casos.

a) $A(1, -1, 3)$ y $B(3, 1, 4)$ 3

b) $A(-2, 1, -5)$ y $B(1, 0, -7)$ $\sqrt{14}$

80. ¿Es isósceles el triángulo de vértices $A(2, 5, -1)$, $B(3, -2, 4)$ y $C(-2, -3, 11)$? Sí

81. Determina las distancias que hay entre los puntos $P(1, 0, 3)$, $Q(4, 5, 1)$ y $R(10, 15, -3)$. ¿Qué puedes decir de los tres puntos? Alineados

$\sqrt{38}$, $2\sqrt{38}$, $3\sqrt{38}$

82. Determina la distancia del origen de coordenadas al plano:

a) OXY b) OXZ c) OYZ

$\sqrt{30}$ $2\sqrt{30}$ 30

83. Determina la distancia entre el punto P y el plano π en cada caso.

a) $P(-3, 5, -4)$ y $\pi: -x + 2y + 2z + 1 = 0$ 2

b) $P\left(0, \dfrac{1}{2}, -3\right)$ y $\pi: 2x - 2y - z + 1 = 0$ 1

c) $P\left(7, -6, \dfrac{3}{5}\right)$ y $\pi: 3x - 4y + 6 = 0$ 10,2

84. Determina un punto de la recta $r: \left.\begin{array}{r} x-z=2 \\ y+2z=3 \end{array}\right\}$ que se encuentre a una distancia de $\sqrt{6}$ unidades del plano de ecuación $\pi: x - y - 2z + 5 = 0$.

$(4,-1,2)$ / $(-6,19,-8)$? $(-8,23,-10)$

85. Halla la distancia al plano $\pi: 8x - 4y + z - 5 = 0$ de los puntos $P(2, 4, 12)$, $Q(0, -1, 1)$ y $R(1, 3, 2)$. ¿Qué puedes decir del punto Q? ¿Y qué tienen en común P y R?

7/9 / 0, 7/9 P, R equidistan Q

86. Determina el punto del plano π más cercano al punto A y la distancia que los separa, en cada uno de los siguientes casos.

a) $A(0, -1, 1)$ y $\pi: x - y - z - 3 = 0$ $\sqrt{3}$

b) $A(-2, 1, -4)$ y $\pi: 3x + 5y - 2z + 7 = 0$ $\frac{34}{\sqrt{38}}$

87. Dados la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+2}{2}$ y los planos $\pi_1: 3x + 4y = 1$ y $\pi_2: 4x - 3z = 1$, determina los puntos de la recta que equidistan de ambos planos.

$\left(\frac{15}{8},\frac{17}{16},-\frac{5}{8}\right)$ / $\left(\frac{31}{10},\frac{41}{20},\frac{27}{10}\right)$

88. Encuentra los puntos de $r: \left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ x-z=0 \end{array}\right\}$ que disten $\dfrac{1}{3}$ del plano $\pi: 2x - y + 2z + 1 = 0$.

$(0,0,0)$ / $\left(-\frac{2}{5},\frac{2}{5},-\frac{2}{5}\right)$

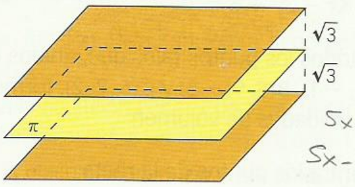
89. Calcula la distancia entre las siguientes parejas de planos.

a) $\pi: \left.\begin{array}{l} x = -4 + 2\lambda + 2\mu \\ y = 1 + \lambda - \mu \\ z = 2 - \lambda - 5\mu \end{array}\right\}$ $\quad \pi': \left.\begin{array}{l} x = 4 + 4\mu \\ y = 3 + \lambda + \mu \\ z = -4 + 2\lambda - 4\mu \end{array}\right\}$ $\frac{4\sqrt{29}}{29}$

b) $\pi: \left.\begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda - \mu \\ y = -2\lambda + \mu \\ z = 3 + \mu \end{array}\right\}$ $\quad \pi': \left.\begin{array}{l} x = 5 + 4\lambda \\ y = -1 + \lambda - 2\mu \\ z = 8 + 3\lambda + 2\mu \end{array}\right\}$ sec 0

c) $\pi: 2x - 4y + z - 7 = 0 \quad \pi': -x + 3y - 5z + 9 = 0$ 0

90. Considera el plano de ecuación $\pi: 5x - y + 7z + 1 = 0$. Calcula dos planos paralelos a él que se encuentren a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades.



5x-y+7z-14=0
5x-y+7z+16=0

91. Sea el plano $\pi: x + 2y + 3z = 12$. Halla la ecuación de los planos paralelos a π y cuya distancia al origen de coordenadas sea de $\sqrt{14}$ unidades. $D = \pm 14$

92. Dos caras de un cubo están en los planos $\pi_1: 2x - 2y + z - 1 = 0$ y $\pi_2: 2x - 2y + z - 5 = 0$. Calcula la longitud de la arista del cubo. 4/3

93. Determina la distancia entre el eje:

a) OX y el plano de ecuación $y + z - 3 = 0$. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

b) OY y el plano de ecuación $2x + z + 5 = 0$. $\sqrt{5}$

c) OZ y el plano de ecuación $-3x + 4y - 2 = 0$. 2/5

94. Determina la distancia entre la recta que pasa por los puntos $A(-1, 1, 1)$ y $B(-3, 2, -5)$, y el plano de ecuación $2x - 2y - z + 3 = 0$. 2/3

95. Determina, en cada caso, la distancia entre la recta r y el plano π.

a) $r: \left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 1 \\ -x + y + 3z = 2 \end{array}\right\}$ $\quad \pi: x + 2y - z + 6 = 0$ $\frac{7\sqrt{6}}{6}$

b) $r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{2y-1}{6} = \dfrac{z}{-4}$ $\quad \pi: x - 2y - z + 3 = 0$ $\frac{5\sqrt{6}}{6}$

c) $r: \left.\begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = -5 + 2t \\ z = -1 + 4t \end{array}\right\}$ $\quad \pi: 2x - 3y + z - 7 = 0$ $\frac{13}{\sqrt{14}}$

96. Determina la ecuación de un plano paralelo a la recta $r: x = \dfrac{y}{-2} = z - 1$ y que contenga a los puntos $A(2, -3, 5)$ y $B(-4, 1, 1)$. Calcula la distancia de la recta r al plano encontrado. 2x-y-4z+13=0 $\frac{9}{\sqrt{21}}$

97. El plano π es el que pasa por los puntos $P_1(-3, 0, 0)$, $P_2(1, -1, -1)$ y $P_3(-1, 0, -1)$. x+2y+2z+3=0

Encuentra los dos puntos de la recta:

$$(\lambda, 1, -2 - \lambda)$$

que están a distancia 1 del plano π. (-2, 1, 0) (4, 1, -6)

98. Dados el plano $\pi: 2x + y - z + 6 = 0$, la recta $r: x = y = \dfrac{z-2}{2}$ y el punto $A(-2, 2, 1)$, determina un punto P de la recta r de manera que la recta que pase por los puntos P y A sea paralela al plano π. (-2, 2, 1) + λ(1, -

Halla la ecuación de esa recta paralela y la distancia del punto P al plano. $\sqrt{6}/2$

99. Calcula los valores del parámetro D para el que la distancia de la recta $r: \dfrac{x-3}{-4} = -y = z - 1$ al plano $\pi: x - 2y + 2z + D = 0$ sea igual a 2 unidades. D = 1 D = -11

100. Determina para qué valores del parámetro D la distancia entre la recta $r: \left.\begin{array}{r} x = 3 \\ y + z = 1 \end{array}\right\}$ y el plano $\pi: 3x + y + z + D = 0$ es de $2\sqrt{11}$ unidades. D = 12 D = -32

101. Calcula la distancia del punto $P(2, -1, 3)$ a los ejes OX, OY y OZ. $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{5}$

102. Determina la distancia entre el punto y la recta en cada uno de los siguientes casos.

a) $P(2, 2, 0)$ y $r: (\lambda, -\lambda, 3 + \lambda)$ $\sqrt{14}$

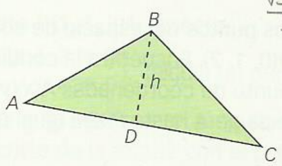
b) $P(-1, 3, 1)$ y $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-3}{2} = -z$ $\sqrt{\frac{3}{2}}$

c) $P\left(0, \dfrac{1}{2}, 0\right)$ y $r: \left.\begin{array}{r} 2x - y = 6 \\ x + z = -1 \end{array}\right\}$ $\frac{\sqrt{77}}{2}$

d) $P(-3, 0, 1)$ y $r: \left.\begin{array}{r} x = 10 - 3t \\ y = 2t \\ z = -5 \end{array}\right\}$ $2\sqrt{22}$

103. Halla la distancia entre el origen de coordenadas y la recta intersección de los planos de ecuaciones $\pi_1: x + y + 2z = 4$ y $\pi_2: 2x - y + z = 2$. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

104. Calcula la longitud de la altura que parte del vértice B en el triángulo de vértices $A(3, -1, -2)$, $B(4, 2, 1)$ y $C(5, 3, 4)$. $\frac{\sqrt{35}}{7}$ u



105. Se consideran los puntos $A(2, -1, 0)$, $B(3, 1, 1)$, $C(0, 1, 2)$ y $D(5, 4, m)$ y el plano $\pi: 2x + 2y - z + 1 = 0$. Halla en tu cuaderno:

a) El valor de m para que los 4 puntos sean coplanarios (estén en un mismo plano). 7/3

b) El ángulo que forma el plano que determinan los puntos A, B y C con el plano π. 63,55°

c) La ecuación de los planos paralelos a π y que se encuentren a 2 unidades de distancia. 2x+2y-z-5=0 2x+2y-z+7=0

d) El punto P del plano π que se encuentre más próximo al punto $Q(-1, 2, 0)$. (-5/3, 4/3, 1/3)

ACTIVIDADES

106. Determina la distancia entre las siguientes rectas.

a) $r: x = y = z$
$s: x = y - 1 = z + 2$ $\sqrt{42}/3$

b) $r: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = 2z$
$s: (x, y, z) = (1, 3, 0) + t(-6, -4, -2)$ 0

c) $r: \left.\begin{array}{l} 2x - y + 3z - 3 = 0 \\ x + 3y + 5z - 1 = 0 \end{array}\right\}$
$s: \dfrac{x-5}{2} = y = -z$

107. Demuestra que las rectas que aparecen a continuación son paralelas.

$$L_1: \left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = 3 + t \end{array}\right\} \qquad L_2: \left.\begin{array}{l} 3x - y + 4 = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{array}\right\}$$

Encuentra la ecuación del plano paralelo al determinado por dichas rectas y que diste de él $\sqrt{6}$.

108. En cada uno de los siguientes casos, determina la distancia entre las rectas dadas utilizando estos tres métodos:

- **Método 1:** Calculando el plano que contiene a r y es paralelo a s y, después, hallando $d(P_s, r)$.
- **Método 2:** Calculando la recta secante perpendicular común a r y s y, después, hallando la distancia entre los puntos de corte con ellas.
- **Método 3:** Utilizando la fórmula de la distancia entre dos rectas que se cruzan.

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$ y $s: \dfrac{x-1}{3} = y - 3 = \dfrac{z+1}{2}$

b) $r: \left.\begin{array}{l} 2x - y + 2z = 3 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{array}\right\}$ y $s: x = y = z$

c) $r: \left.\begin{array}{l} -x + 2z = 2 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$ y $s: \left.\begin{array}{l} x - 3 = y \\ z = 1 \end{array}\right\}$

109. Sean P y Q los puntos del espacio de coordenadas $P(0, 0, 0)$ y $Q(0, 1, 2)$. Encuentra la condición que debe cumplir un punto de coordenadas $A(x, y, z)$ para que la distancia de A hasta P sea igual que la distancia de A hasta Q.

¿El conjunto de todos los puntos que satisfacen esta condición forma un plano? Razona la contestación.

110. Dado el plano $\pi: x + 3y + z = 4$:

a) Determina la distancia del origen de coordenadas al plano π.

b) Calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π.

c) Calcula el ángulo que forma el plano π y el plano de ecuación $x = 0$.

d) Calcula el volumen del tetraedro T determinado por el plano π y los planos coordenados.

Lugares geométricos. La esfera

111. Determina la ecuación general del lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los puntos:

a) $A(-3, 1, 1)$ y $B(1, 3, 5)$

b) $A(-1, 4, 2)$ y $B(3, -2, 1)$

112. Determina la ecuación general del lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los planos:

a) $\pi_1: x + 2y - 2z + 3 = 0$
$\pi_2: 2x - y + 2z - 7 = 0$

b) $\pi_1: 3x + 4z + 9 = 0$
$\pi_2: 4x - 3y + 6 = 0$

113. Halla todos los puntos tales que, unidos con los puntos $A(3, 5, -1)$, $B(5, 9, -5)$ y $C(6, 2, 2)$, formen un tetraedro de 15 unidades de volumen.

114. Encuentra los puntos de la recta:

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{2}$$

que equidistan de los planos $\alpha: x + y - z + 1 = 0$ y $\beta: x - y + z + 2 = 0$.

115. Determina la ecuación de la esfera de centro el punto C y radio r en cada uno de los casos.

a) $C(-2, 1, 3)$ y $r = 4$

b) $C(4, -1, 0)$ y $r = \sqrt{2}$

116. Determina la ecuación de la esfera de centro el punto C, sabiendo que el punto A se encuentra en su superficie.

a) $C(-1, 2, 3)$ y $A(2, 3, 2)$

b) $C(0, -1, 1)$ y $A(3, -1, 5)$

117. Determina la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$ y $D(0, 0, 1)$. Calcula también su centro y su radio.

118. Determina la ecuación del plano tangente a la esfera, de centro el punto C, en el punto A.

a) $C(-1, 2, 3)$ y $A(2, 3, 2)$

b) $C(0, -1, 1)$ y $A(3, -1, 5)$

119. Conocidas las ecuaciones de la esfera, determina su centro y su radio en cada caso.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 2 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z + 11 = 0$

120. La esfera de centro C es tangente al plano π. Determina en cada caso la ecuación de la esfera y el punto de tangencia.

a) $C(2, -1, 3)$ y $\pi: x - y + z = 0$

b) $C(-3, 1, 0)$ y $\pi: 4x - 3y + 5 = 0$

121. Determina la ecuación de una esfera que tiene su centro en la recta $r: \left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ z - x = 1 \end{array}\right\}$ y es tangente al plano $\pi: x - y + 2z - 4 = 0$ en el punto $P(3, 1, 1)$.

122. Estudia si esta ecuación corresponde a una esfera. En caso afirmativo, calcula su centro y su radio.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2 = 0$$

123. Halla la ecuación del plano tangente a la esfera de centro $C(1, 2, -1)$ en el punto $A(-2, 1, 3)$.

Problemas con ángulos y distancias

124. Considera las rectas r y s de ecuaciones:

$$r: \left.\begin{matrix} x + 2y - z - 3 = 0 \\ x - y - 3z + 6 = 0 \end{matrix}\right\} \qquad s: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+a}{3}$$

a) Estudia, en función del parámetro a, la posición relativa de las rectas.

b) Determina la ecuación general de la recta secante perpendicular común a las rectas para $a = 1$.

c) Para $a = 1$, calcula la distancia entre ambas rectas.

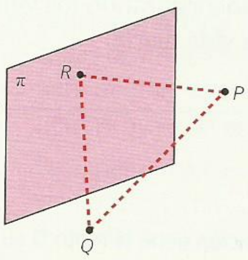
125. Un helicóptero situado en el punto $P(1, 2, 1)$ quiere aterrizar en el plano $\pi: x + y + 3z = 0$.

a) Calcula la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que le lleve al punto más cercano a π.

b) Halla dicho punto.

c) Calcula la distancia que debe recorrer.

126. Construye un triángulo equilátero de forma que dos de sus vértices sean $P(1, 2, 3)$ y $Q(-1, 4, 3)$ y el tercer vértice R esté en el plano $\pi: x + y + z = 2$. ¿Qué área tiene?



127. Sean los puntos $A(\lambda, 2, \lambda)$, $B(2, -\lambda, 0)$ y $C(\lambda, 0, \lambda + 2)$.

a) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C estén alineados?

b) Comprueba que si A, B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

c) Calcula la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor de $\lambda = 0$, y halla la distancia de este plano al origen de coordenadas.

128. Dadas las rectas r_1: $x = y = z$, r_2: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$ y r_3: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$, determina sus tres puntos de corte A, B y C, respectivamente, con el plano π: $5x - 4y + 7z + 1 = 0$ y halla el área del triángulo ABC.

129. Considera la recta r: $\left.\begin{matrix} x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{matrix}\right\}$ y los puntos $P(1, 2, 3)$ y $Q(-1, 0, 1)$.

a) Determina el punto simétrico de P respecto de r.

b) Calcula un punto R de la recta r de modo que el triángulo PQR sea rectángulo en Q y determina su área.

130. Dados los planos π_1: $x - 2y = 1$, π_2: $x + 2z = 2$ y el punto $P(1, -2, 3)$, calcula el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y las proyecciones de este sobre los planos π_1 y π_2.

131. Tenemos un punto $A(12, -1, 1)$ y una recta r que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$ y tiene como vector director al vector $\vec{v}(3, 4, 0)$. Encuentra el punto o los puntos de la recta r que determinan, junto con A y P, un triángulo de área igual a 50 unidades cuadradas.

132. Sean los puntos $A(1, 3, -2)$, $B(2, 2m + 1, m)$ y $C(m + 1, 4, 3)$.

a) Determina para qué valor de m el triángulo ABC es rectángulo, con el ángulo recto en el vértice A.

b) Para $m = 0$, determina el punto o los puntos D de la recta r: $(\lambda, 3, \lambda)$ tales que el volumen del tetraedro formado por los puntos A, B, C y D sea de $0{,}5\ u^3$.

133. Considera el plano π, perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ por su punto medio, con $P(8, 13, 8)$ y $Q(-4, -11, -8)$.

a) Calcula la ecuación del plano π.

b) Obtén la proyección ortogonal del origen sobre π.

c) Halla el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano π corta a los ejes coordenados y el origen de coordenadas.

134. Dados el punto $P(1, 1, 3)$ y la recta r: $\left.\begin{matrix} 2x - y - 2z + 3 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{matrix}\right\}$, calcula un punto R de la recta r tal que el triángulo PQR sea rectángulo en P, con Q el punto de corte de la recta r con el plano OXY. Determina su área.

135. Halla el área del triángulo de vértices ABC, sabiendo que A es el punto de corte de la recta r: $x - 1 = \frac{y+2}{3} = 3 - z$ y el plano π_1: $x - y + z + 1 = 0$, B es el punto de corte de la recta r con el plano π_2: $z = 2$ y C es la proyección ortogonal del punto B sobre el plano π_1.

136. Halla la ecuación general del plano que equidista de los puntos $P(2, 1, 3)$ y $Q(0, 3, -1)$ y es paralelo al plano π: $3x - y + z + 1 = 0$.