4. Sea el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{c} y+3z=1 \\ (a^2-a-2)x-y-3z=-1 \\ (a^2-a-2)x+(a^2-2a)z=2-a \end{array}\right\}$$

d) Discute el sistema en función de a

e) Calcula la solución para a=3

f) Calcula la solución para a=-1

5. Dado el sistema siguiente, discutir y resolver cuando sea posible

$$\left.\begin{array}{c} x+ky-z=0 \\ kx-y+z=0 \\ (k+1)x+y=0 \end{array}\right\}$$

6. Discute el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{c} kx+ky-z=2 \\ 3x-ky=0 \\ 5x+ky=0 \\ x+2z=1 \end{array}\right\}$$

Resuelve cuando sea compatible.

4. En una academia de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán. Cada alumno está matriculado en un único idioma. El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60% del total de alumnos de la academia. Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos. Además, la cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán. Calcule el número de alumnos matriculados en cada idioma.

TEMA 3. 2º Bach A 2021-22

(1) $\left.\begin{array}{l} y+3z=1 \\ (a^2-a-2)x-y-3z=-1 \\ (a^2-a-2)x+(a^2-2a)z=2-a \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 \\ (a^2-a-2) & -1 & -3 & -1 \\ (a^2-a-2) & 0 & (a^2-2a) & 2-a \end{array}\right)$

$|A| = -3(a^2-a-2) - [-3(a^2-a-2) - (a^2-a-2)(a^2-2a)] =$

$= -3(a^2-a-2) + 3(a^2-a-2) + (a^2-a-2)(a^2-2a) =$

$= (a^2-a-2)(a^2-2a) = 0$

$\to (a^2-a-2)=0 \to \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -1 \end{cases}$

$\to (a^2-2a)=0 \Rightarrow a(a-2)=0 \begin{cases} a_3 = 0 \\ a_4 = 2 \end{cases}$

Si $a \neq 0,-1,2$, rg $A = 3 =$ rg $A^* =$ nº inc. SCD

Si $a=0$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ rg $A=2$

$|A^*| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ rg $A^* = 3$

$\Big\}$ rg $A = 2 \neq$ rg $A^* = 3$ SI

Si $a=-1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ $\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ rg $A=2$

$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ rg $A^* = 2$

$\Big\}$ rg $A = 2 =$ rg $A^* <$ nº inc SCI

Si $a=2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ rg $A = 1 =$ rg $A^* <$ nº inc. SCI

b) $a=3 \Rightarrow$ SCD $|A| = -12$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-12} = 0$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{-12} = 2$; $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-12} = -\dfrac{1}{3}$

Solución $\left(0, 2, -\frac{1}{3}\right)$

c) $a=-1 \Rightarrow$ SCI $\left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{1} \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[|B|=-3]{x=\lambda} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{-3} = -2$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{-3} = 1$ Solución $(\lambda, -2, 1)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

② $\left.\begin{array}{l} x+ky-z=0 \\ kx-y+z=0 \\ (k+1)x+y=0 \end{array}\right\}$ Sistema homogéneo $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 0 \\ k & -1 & 1 & 0 \\ (k+1) & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$|A| = -k + k(k+1) - [(k+1)+1] = -k + k^2 + k - k - 1 - 1 =$

$= k^2 - k - 2 = 0 \longrightarrow k_1 = 2$, $k_2 = -1$

Si $k \neq -1, 2$ $\quad rg\ A = 3 = rg\ A^* = n^o$ incógnitas $\Rightarrow$ SCD

Por ser homogéneo, la solución $(0,0,0)$

Si $k=-1, 2$ $\quad rg\ A = 2 = rg\ A^* < n^o$ incógnitas, por ser homogéneo $\rightarrow$ SCI

• Si $k=-1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \cancel{0} \quad \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \xrightarrow[|B| = -2]{z=\lambda} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \lambda \\ -1 & -1 & -\lambda \end{array}\right)$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \dfrac{-\lambda-\lambda}{-2} = \dfrac{-2\lambda}{-2} = \lambda$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}}{-2} = \dfrac{-\lambda+\lambda}{-2} = 0$

$(\lambda, 0, \lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

• Si $k=2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \cancel{3} \quad \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \xrightarrow[|B| = -5]{z=\lambda} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \lambda \\ 2 & -1 & -\lambda \end{array}\right)$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-5} = \dfrac{-\lambda+2\lambda}{-5} = -\dfrac{\lambda}{5}$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix}}{-5} = \dfrac{-\lambda-2\lambda}{-5} = \dfrac{3\lambda}{5}$

$\left(-\dfrac{\lambda}{5}, \dfrac{3\lambda}{5}, \lambda\right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

③ $\left(\begin{array}{ccc|c} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$ $\quad \begin{vmatrix} 3 & -k & 0 \\ 5 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6k + 10k = 16k = 0 \rightarrow k = 0$

Si $k \neq 0 \rightarrow rg\ A = 3$

$\begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_1 - F_4}{=} \begin{vmatrix} k-2 & k & -5 & 0 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{1} \end{vmatrix} = -15k - 25k = -40k = 0$

$\Rightarrow k = 0$

Si $k \neq 0$ $\quad rg\ A = 3 \neq rg\ A^* = 4 \Rightarrow$ SI

Si $k=0$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow rg\ A = 2$

$|A^*| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \Rightarrow rg\ A = 3$

$rg\ A = 2 \neq rg\ A^* = 3 \Longrightarrow$ SI

Nunca es compatible, no se puede resolver

(4) x = nº alumnos Inglés
y = nº alumnos Francés
z = nº alumnos Alemán

$$x = 0{,}60\,(x+y+z)$$
$$y-10 = z+10$$
$$\frac{x}{4} = 2(y-z)+8$$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}4x - 0{,}6y - 0{,}6z = 0 \\ y - z = 20 \\ x - 8y + 8z = 32 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x - 6y - 6z = 0 \\ y - z = 20 \\ x - 8y + 8z = 32 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \\ 1 & -8 & 8 & 32 \end{array}\right)$$

$$|A| = 38 - [-6+32] = 38 - 26 = 12 \neq 0$$

SCD

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -6 & -6 \\ 20 & 1 & -1 \\ 32 & -8 & 8 \end{vmatrix}}{12} = \frac{2304}{12} = 192 \text{ de inglés}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 20 & -1 \\ 1 & 32 & 8 \end{vmatrix}}{12} = \frac{888}{12} = 74 \text{ de francés}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 20 \\ 1 & -8 & 32 \end{vmatrix}}{12} = \frac{648}{12} = 54 \text{ de alemán}$$