TEMA 4. 2º BACHILLERATO A

1. Calcula el área y el volumen del tetraedro de vértices A(-1,4,-1), B(-3,5,2), C(-2,1,0), D(-7,3,-1) (2 ptos)
2. Dados los vectores $\vec{u} = (-5, -1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 1, -5)$. Calcula:
    a. Los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$
    b. El producto escalar y vectorial de esos dos vectores
    c. El ángulo que forman y La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$
    d. El valor de m para que el vector (-5,m,-3) sea ortogonal a $\vec{u}$
    e. Un vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$
    f. El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (3 ptos)
3. Halla un vector $\vec{v}$ coplanario con $\vec{a} = (2, -1, 1)$, $\vec{b} = (1,0,3)$ y que sea ortogonal a $\vec{c} = (2,3,0)$ (1,5)
4. El volumen de un tetraedro es de 12 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los siguientes puntos A(-2,0,5), B(4,-2,7) y C(0,-1,-3) halla las coordenadas del vértice D sabiendo que está en el eje Z. (2 puntos)
5. Dos vértices consecutivos de un paralelogramos son A(1,1,1) y B(0,2,0). SI el centro del paralelogramo es E(0,0,1) se pide:
    a. Las coordenadas de los otros vértices.
    b. La longitud de las diagonales
    c. El área del paralelogramo (1,5 puntos)

T. 4 2º Bach A

(1) A (−1, 4, −1) B (−3, 5, 2) C (−2, 1, 0) D (−7, 3, −1)

$\vec{AB}\ (-2, 1, 3)$

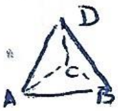
$\vec{AC}\ (-1, -3, 1)$

$\vec{AD}\ (-6, -1, 0)$

$$V = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{(3-6)-(54+2)}{6} = \left|\frac{-3-56}{6}\right| = \left|\frac{-59}{6}\right|$$

$$V = \frac{59}{6} u^3 = 9{,}83\ u^3$$

Área



$$A_1 = \frac{|\vec{AC} \times \vec{AB}|}{2} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{|(-10, 1, -7)|}{2} = \frac{\sqrt{100+1+49}}{2} = \frac{\sqrt{150}}{2} u^2 = 6{,}12$$

$$A_2 = \frac{|\vec{AD} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{|(-1, 6, 17)|}{2} = \frac{\sqrt{1+36+289}}{2} = \frac{\sqrt{326}}{2} u^2 = 9{,}03$$

$$A_3 = \frac{|\vec{BD} \times \vec{BC}|}{2} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -2 & -3 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{|(-8, 11, 18)|}{2} = \frac{\sqrt{64+121+324}}{2} = \frac{\sqrt{509}}{2} u^2 = 11{,}28$$

$$A_4 = \frac{|\vec{AD} \times \vec{AB}|}{2} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{|(-3, 18, -8)|}{2} = \frac{\sqrt{397}}{2} u^2 = 9{,}96$$

$$A_T = 36{,}39\ u^2$$

(2) $\vec{u}(-5, -1, 2)$, $\vec{v}(-2, 1, -5)$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{25+1+4} = \sqrt{30}$

$|\vec{v}| = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-5, -1, 2)(-2, 1, -5) = 10 - 1 - 10 = -1$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (3, -29, -7)$$

c) $$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|-1|}{\sqrt{30}\sqrt{30}} \qquad \alpha = 88{,}09^\circ$$

$$\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})}{|\vec{v}|} = \frac{|-1|}{\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{30}$$

d) $(-5, m, -3)(-5, -1, 2) = 0 \rightarrow 25 - m - 6 = 0 \rightarrow \boxed{m = 19}$

e) $\vec{u} \times \vec{v} = (3, -29, -7) = \vec{w}$

$$\vec{a} = \left(\frac{3}{\sqrt{899}}, \frac{-29}{\sqrt{899}}, \frac{-7}{\sqrt{899}}\right)$$

f) $A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{899}\ u^2$

(3) $$|\vec{v}, \vec{a}, \vec{b}| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -3x + y + z - 6y = 0 \rightarrow -3x - 5y + z = 0$$

$\vec{v} \cdot \vec{c} = (x, y, z)(2, 3, 0) = 0 \rightarrow 2x + 3y = 0$

$$\begin{cases} -3x - 5y + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \quad z = \lambda \quad \begin{cases} -3x - 5y = -\lambda \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -6x - 10y = -2\lambda \\ 6x + 9y = 0 \end{cases}$$

$$-y = -2\lambda \qquad y = 2\lambda$$

$$2x + 6\lambda = 0 \rightarrow x = -\frac{6\lambda}{2} = -3\lambda$$

$\vec{v}(-3\lambda, 2\lambda, \lambda)\quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \sim (-3, 2, 1)$

(4) $V = \dfrac{|\vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DC}|}{6} = 12$ $\qquad D(0,0,z)$ $\qquad \vec{DA}\,(-2,0,5-z)$

$\vec{DB}\,(4,-2,7-z)$

$\vec{DC}\,(0,-1,-3-z)$

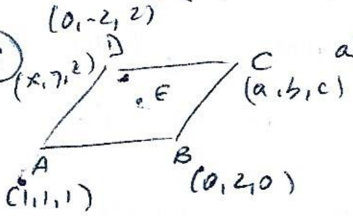
$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 5-z \\ 4 & -2 & 7-z \\ 0 & -1 & -3-z \end{vmatrix} = 72 \rightarrow 4(-3-z) - 4(5-z) - 2(7-z) = \pm 72$$

$$-12 \cancel{-4z} - 20 \cancel{+4z} - 14 + 2z = \pm 72 \rightarrow$$

$$2z - 46 = \pm 72 \quad \begin{cases} z_1 = 59 & D_1(0,0,59) \\ z_2 = -13 & D_2(0,0,-13) \end{cases}$$

$D(0,0,-11)$

(5)



a) $PM(\overline{AC}) = E = (0,0,1) = \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c+1}{2}\right) \rightarrow a = -1,\ b = -1,\ c = 1 \quad C(-1,-1,1)$

$PM(\overline{DB}) = E = (0,0,1) = \left(\frac{x+0}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+0}{2}\right) \rightarrow x = 0,\ y = -2,\ z = 2 \quad D(0,-2,2)$

b) $|\overline{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{8}$

$|\overline{DB}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

c) $A = |\vec{AD} \times \vec{AB}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & +1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = |(2,-2,-4)| = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24}\ u^2$