Tema 2. 2º Bachillerato A

1. Escribe las propiedades de los determinantes.
2. Calcular aplicando propiedades de determinantes:
   a. $\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$
   b. Si A es una matriz de dimensión 3x3 y su determinante vale 9. Calcula:
      - $|B| = |5C_1 + 3C_3, C_2 - 2C_1, \; 6C_3 - C_2|$
      - $|5A|, |A^4|, |A^{-1}|$
3. Dada la matriz A donde x es un número real
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$$
   a. Halla los valores de x para los que la matriz es regular.
   b. El rango de A en función del valor de x.
4. Calcula el siguiente determinante:
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$
5. Resuelve la siguiente ecuación XA – X = B, siendo:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

TEMA 2. 2ºBACH A

(2)

a) $\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} = bc \begin{vmatrix} a & -ab & a^2 \\ -b & 2b^2 & -ab \\ bc & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} = b^2c \begin{vmatrix} a & -a & a^2 \\ -b & 2b & -ab \\ bc & -bc & 3abc \end{vmatrix} =$

$= ab^2c \begin{vmatrix} a & -a & a \\ -b & 2b & -b \\ bc & -bc & 3bc \end{vmatrix} = a^2b^2c \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -b & 2b & -b \\ bc & -bc & 3bc \end{vmatrix} = a^2b^3c \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ bc & -bc & 3bc \end{vmatrix} =$

$= a^2b^4c^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = a^2b^4c^2 \left[(6+1+1) - (2+1+3)\right] = a^2b^4c^2 \cdot 2$

b) $|A| = 9$

- $|B| = |5C_1 + 3C_3,\ C_2 - 2C_1,\ 6C_3 - C_2| =$
$= |5C_1,\ C_2 - 2C_1,\ 6C_3 - C_2| + |3C_3,\ C_2 - 2C_1,\ 6C_3 - C_2| =$
$= |5C_1, C_2, 6C_3 - C_2| + \cancel{|5C_1, -2C_1, 6C_3 - C_2|} + |3C_3, C_2, 6C_3 - C_2| +$
$+ |3C_3, -2C_1, 6C_3 - C_2| =$
$= |5C_1, C_2, 6C_3| + \cancel{|5C_1, C_2, -C_2|} + \cancel{|3C_3, C_2, 6C_3|} + \cancel{|3C_3, C_2, -C_2|} +$
$+ \cancel{|3C_3, -2C_1, 6C_3|} + |3C_3, -2C_1, -C_2| =$
$= 30\,|C_1, C_2, C_3| + 6\,|C_3, C_1, C_2| = 30\,|C_1, C_2, C_3| + 6\,|C_1, C_2, C_3| =$
$= 36\,|C_1, C_2, C_3| = 36 \cdot 9 = 324$
- $|5A| = 5^3|A| = 125 \cdot 9 = 1125$
- $|A^4| = 9^4 = 6561$
- $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{9}$

(3) a) A es regular si $|A| \neq 0$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 4x - 3 = 0$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{-2} = \dfrac{-4 \pm 2}{-2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

Si $x \neq 1, 3$ la matriz es regular

b) Si $x \neq 1, 3$ rg $A = 3$ porque $|A| \neq 0$

Si $x = 1$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ rg $A = 2$

Si $x = 3$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ rg $A = 2$

(4)
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \\ F_4 = F_4 - F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 - (-2) = -1 + 2 = 1$$

(5) $XA - X = B \longrightarrow X(A - I) = B \longrightarrow X = B(A - I)^{-1}$

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$C = A - I \rightarrow |C| = 4$

$C_{11} = -8$ $\quad C_{21} = +8$ $\quad C_{31} = -4$

$C_{12} = -4$ $\quad C_{22} = 3$ $\quad C_{32} = 0$

$C_{13} = 0$ $\quad C_{23} = +1$ $\quad C_{33} = 0$

$$C^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -8 & 8 & -4 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -9/4 & 2 \\ -5 & 14/4 & -1 \\ 1 & -3/4 & 0 \end{pmatrix}$$