Funciones producto de polinómicas por exponenciales

8. Dada la función:

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

se pide:

a) asíntotas.

b) crecimiento, decrecimiento.

c) puntos de inflexión.

a) Asíntotas

Verticales: no tiene, porque en el denominador estaría e^x, que nunca se anula.

Horizontales:

$h = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x}(x^2 + 1) = +\infty$ $\qquad$ $k = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}(x^2 + 1) = 0$

La asíntota horizontal es $y = 0$, pero solo cuando $x \to +\infty$

Posición de la curva respecto de la asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}(x^2 + 1) = 0^+$

La curva está encima de la asíntota.

Oblicuas:

$m_1 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}(x^2 + 1)}{x} = -\infty$ $\qquad$ $m_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x}(x^2 + 1)}{x} = 0$

no tiene asíntotas oblicuas.

b) Crecimiento y decrecimiento

Tenemos que hallar previamente los máximos y mínimos relativos.

$f'(x) = (-x^2 + 2x - 1)e^{-x}$

$-x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ raíz doble.

$x = 1 \Rightarrow y = 2/e \Rightarrow A(1, 2/e)$

$f''(x) = (x^2 - 4x + 3)e^{-x}$

$f''(1) = 0$

$f'''(x) = (-x^2 + 6x - 7)e^{-x}$

$f'''(1) = -2/e \neq 0 \Rightarrow$ **$A(1, 2/e)$, punto de inflexión.**

No tiene máximos ni mínimos relativos.

Monotonía:

No tiene discontinuidades, ni máximos, ni mínimos relativos; por tanto, es siempre creciente o decreciente.

$f'(x) = (-x^2 + 2x - 1)e^{-x}$

$f'(0) = -1 < 0\ (-)$

f'(x) $\quad -$

x $\quad 0$

Creciente (↗): $\varnothing$

Decreciente (↘): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

c) Puntos de inflexión.

$f''(x) = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$

$x = 1 \Rightarrow$ **$A(1, 2/e)$, punto de inflexión.**

$x = 3 \Rightarrow y = 10/e^3 \Rightarrow B(3, 10/e^3)$

$f'''(3) = 2/e^3 \neq 0 \Rightarrow$

$B(3, 10/e^3)$, punto de inflexión.