ACTIVIDADES

Ejercicios

Coordenadas de un vector

77. Para cada uno de los siguientes casos, calcula las coordenadas del vector de origen el punto *A* y de extremo el punto *B*.

a) $A(2, 0, -3)$; $B(0, -3, 5)$

b) $A\left(\frac{1}{2}, -2, \frac{2}{2}\right)$; $B\left(-1, \frac{3}{5}, 2\right)$

78. Del vector $\overrightarrow{PQ}=(-2, 0, 3)$ se sabe que el origen tiene coordenadas $P(1, -2, 3)$. Calcula las coordenadas del extremo *Q*.

79. Del vector $\overrightarrow{PQ}=(4,-1, 2)$ se sabe que el extremo tiene coordenadas $Q(2, -3, -4)$. Calcula las coordenadas del origen *P*.

División de un segmento

80. Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos *A* y *B* para cada uno de los siguientes casos.

a) $A(-3, 2, -3)$; $B(1, -2, -1)$

b) $A\left(\frac{1}{3}, -3, -\frac{4}{3}\right)$; $B\left(-2, \frac{2}{3}, 2\right)$

c) $A(5, 3, -2)$; $B(10, 2, -7)$

81. Calcula las coordenadas de dos puntos *A* y *B* que dividan al segmento de extremos $P(2, 2, -1)$ y $Q(5, -4, -7)$ en tres segmentos de la misma longitud.

82. Calcula las coordenadas de tres puntos *A*, *B* y *C* que dividan al segmento de extremos $P\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ y $Q\left(-3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$ en cuatro segmentos de la misma longitud.

83. Dado el segmento de extremos $A(2, 1, -1)$ y $B(5, -2, 8)$:

a) Calcula las coordenadas del punto *C* de forma que *B* sea el punto medio del segmento *AC*.

b) Calcula las coordenadas de dos puntos *P* y *Q* pertenecientes al segmento *AB* y tales que dividan a este en tres segmentos de igual longitud.

Ecuaciones de la recta

84. Escribe las ecuaciones paramétricas, la ecuación en forma continua y las ecuaciones implícitas de la recta:

a) Que pasa por los puntos $A(1, -2, 0)$ y $B(2, -3, -1)$.

b) Que pasa por el punto $A(-2, -2, 0)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u}=(-1, -1, 4)$.

c) Que pasa por el punto $A\left(-\frac{2}{3}, -2, \frac{1}{2}\right)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u}=\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

85. Dados los puntos $A(1, -1, 2)$ y $B(-1, -2, 0)$, calcula unas ecuaciones paramétricas y unas implícitas para la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene como vector de dirección al vector $\overrightarrow{AB}$.

86. Calcula dos puntos de cada una de las siguientes rectas.

a) $r:\begin{cases} x=-2+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases}$

b) $r:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-2}$

c) $r:\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$

87. Halla un punto y un vector de dirección de cada una de las si-guientes rectas.

a) $r:\begin{cases} x=-3\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=1-4\lambda \end{cases}$

b) $r:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+2}{3}$

c) $r:\begin{cases} 2x+y=3 \\ 2x-z=1 \end{cases}$

88. Calcula la ecuación en forma continua y las ecuacion implícitas de la recta de ecuaciones paramétricas:

$$r:\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3-3\lambda \end{cases}$$

89. Calcula las ecuaciones paramétricas y la ecuación en for continua de la recta de ecuaciones implícitas:

$$r:\begin{cases} 3x-y-z-1=0 \\ x+y-z-3=0 \end{cases}$$

90. Escribe las ecuaciones de cada una de las siguientes rectas

a) Eje *X*

b) Paralela al eje *Y* y que pasa por el punto $(3, 0, 2)$.

c) Bisectriz de los ejes positivos *X* e *Y*

91. Escribe la ecuación en forma continua de las rectas que se dican a continuación. Calcula un punto y un vector dire de cada una de ellas. Ten en cuenta que las ecuaciones da no están en forma continua.

a) $r:\dfrac{x}{2}=\dfrac{2y-2}{3}=\dfrac{z-1}{-3}$

b) $r:\dfrac{-x+1}{3}=\dfrac{2y-4}{2}=\dfrac{3z-2}{-4}$

92. Se considera la recta que pasa por el punto $A(-1, 2, -3)$ y t como dirección la del vector $\vec{u}=(2, -1, 2)$.

a) Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación contin la recta.

b) Decide cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la re cuáles no:

$P(5, -1, 3)$ $\quad Q(-3, 3, -4)$ $\quad R\left(0, \frac{3}{2}, -2\right)$

c) Escribe dos puntos más de dicha recta.

93. Verifica si los siguientes puntos pertenecen o no a una misma recta. En caso afirmativo, calcula sus ecuaciones paramétricas.

a) $A(2, -1, 2)$, $B(3, 0, 3)$ y $C(4, 1, 4)$

b) $A(1, -1, 1)$, $B(-1, -2, 1)$ y $C(3, -1, 1)$

c) $A(3, 0, -2)$, $B(-4, 2, 0)$ y $C(3, 1, 0)$

Ecuaciones del plano

94. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita del plano:

a) Que pasa por el punto $A(-1, 3, 1)$ y lleva la dirección de los vectores $\vec{u}=(1,-1,3)$ y $\vec{v}=(-1,-1,4)$.

b) Que pasa por los puntos $A(1, -1, 2)$, $B(2, 0, -1)$ y $C(-3, 1, 0)$.

c) Que pasa por el punto $A\left(-\dfrac{3}{2}, 2, \dfrac{1}{2}\right)$ y lleva la dirección de los vectores $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{3}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$ y $\vec{v}=\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

d) Que contiene al triángulo de vértices $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.

95. Dados los puntos $A(1, 1, -2)$, $B(-1, -2, -3)$ y $C(1, 1, 0)$, calcula la ecuación implícita del plano que pasa por el origen de coordenadas y tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

96. Calcula dos puntos de cada uno de los siguientes planos.

a) $\pi:\begin{cases} x=1-\lambda+\mu \\ y=2+2\lambda-\mu \\ z=3-3\lambda-2\mu \end{cases}$ b) π: $2x+y-3z=1$

97. Calcula un punto, dos vectores de dirección linealmente independientes y un vector normal de cada uno de los siguientes planos:

a) $\pi:\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=3\lambda-2\mu \\ z=1-2\lambda-\mu \end{cases}$ b) π: $3x-y-2z=0$

98. Escribe unas ecuaciones paramétricas para el plano de ecuación implícita π: $x-2y+3z=1$.

99. Escribe las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por $A(1, 3, -2)$ y tiene como vector normal $\vec{n}=(1,-2,0)$.

100. Escribe la ecuación implícita del plano de ecuaciones paramétricas:

$$\pi:\begin{cases} x=-2-2\lambda+3\mu \\ y=1-2\lambda-2\mu \\ z=1+2\lambda-2\mu \end{cases}$$

101. Verifica si los siguientes puntos pertenecen o no a un mismo plano. En caso afirmativo, calcula su ecuación.

a) $A(2, 1, -5)$, $B(1, 0, -2)$, $C(-1, 2, 0)$ y $D(-2, 0, 5)$

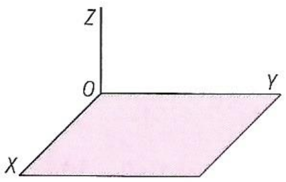
b) $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(2, -1, 1)$ y $D(-2, 2, 2)$

c) $A(1, -1, 1)$, $B(-1, -2, 1)$, $C(3, -1, 1)$ y $D(2, 1, 6)$

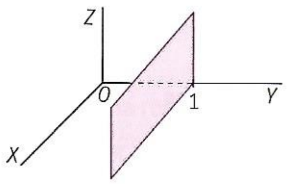
d) $A(1, -1, 2)$, $B(2, 0, -1)$, $C(-3, 1, 0)$ y $D(-3, 3, 3)$

102. Escribe las ecuaciones de cada uno de los siguientes planos:

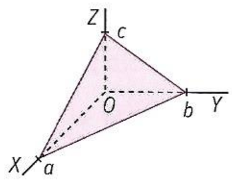
a)



b)



c)



Posiciones relativas de dos planos

103. Estudia la posición relativa de los dos planos π y π' en los siguientes casos.

a) $\pi: 2x-y+z=0$, $\pi': -2x+y+z=1$

b) $\pi: 2x-y+z=0$, $\pi': -4x+2y-2z=1$

c) $\pi: 2x-y+z=0$, $\pi': -4x+2y-2z=0$

d) $\pi: x+y-1=0$, $\pi': x+z-2=0$

Posiciones relativas de tres planos

104. Estudia la posición relativa de los tres planos π, π' y π'' en los casos siguientes.

a) $\pi: 2x-y+z=0$, $\pi': 3x+y+4z=0$, $\pi'': x+y-z=3$

b) $\pi: 2x+y+z=0$, $\pi': x+y-z=0$, $\pi'': x+2z=1$

c) $\pi: x+y-z=0$, $\pi': 3x+2y+1=0$, $\pi'': x+2z+1=0$

d) $\pi: -2x-y+3z=3$, $\pi': 6x+3y-9z=-9$, $\pi'': -10x-5y+15z=15$

e) $\pi: 2x-y+z=0$, $\pi': x-2y+3z=1$, $\pi'': 3x-3y+4z=1$

f) $\pi: 2x-4y+6z+1=0$, $\pi': x+2y+z=0$, $\pi'': x-2y+3z-1=0$

g) $\pi: 2x-y+3z=4$, $\pi': x-2y-z=-7$, $\pi'': -2x+y-z=2$

h) $\pi: x+y-z=0$, $\pi': x-y+z=0$, $\pi'': x=0$

Posiciones relativas de recta y plano

105. En cada uno de los siguientes casos, estudia la posición relativa del plano π: $x-y+2z=1$ y las rectas siguientes.

a) $r:\begin{cases} x=1+t \\ y=-2t \\ z=3t \end{cases}$ b) $s: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{1}$ c) $t:\begin{cases} x=1+2t \\ y=4t \\ z=t \end{cases}$

106. En los siguientes casos, calcula el punto de intersección de la recta r con el plano π.

a) $r: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$ $\quad \pi: 2x + y - z = 0$

b) $r: \begin{cases} x = 10 - 3t \\ y = -7 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ $\quad \pi: 3x + 2y - z + 1 = 0$

Posiciones relativas de dos rectas

107. Estudia la posición relativa de las rectas r y s en los siguientes casos.

a) $r: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{2} = z + 1$ $\quad s: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+8}{2} = z + 5$

b) $r: \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$ $\quad s: \begin{cases} x = 2t \\ y = -2t \\ z = -3t \end{cases}$

c) $r: x = -y = z$ $\quad s: \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$

d) $r: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ $\quad s: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$

e) $r: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-5}{4}$ $\quad s: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -5 - t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$

Haces de rectas y planos

108. Escribe las ecuaciones de los haces de rectas:

a) Paralelas a $r: \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -8 \end{cases}$.

b) Que pasan por el punto de intersección del plano $\pi: x + 2y - z = 4$ y la recta $r: \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$.

109. Escribe la ecuación del haz de planos secantes en las rectas:

a) $r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$ $\quad$ b) $s: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{3}$

110. Escribe la ecuación del haz de planos paralelos, tal que uno de ellos pase por los puntos $A(-2, 1, 1)$, $B(3, 0, -3)$ y $C(-2, 1, 4)$.

Síntesis

111. Dados los puntos $A(-1, 2, 0)$ y $B(5, -2, 4)$, calcula las coordenadas del punto C que está situado en el interior del segmento de extremos A y B, tal que la distancia de C a B sea el triple que la distancia de C a A.

112. Calcula el valor de a para que los puntos $A(2, 0, -1)$, $B(1, 2, -2)$ y $C(1, a, a)$ pertenezcan a una misma recta.

113. Calcula todos los valores de m que hacen que los puntos del espacio $A(0, 2, 2)$, $B(1, 1, m^2 - 1)$ y $C(2, 0, 2m)$, pertenezcan a una misma recta.
Escribe unas ecuaciones implícitas para esa recta.

114. Calcula el valor de m para que los puntos del espacio $A(0, 1, 2)$, $B(1, 0, 3)$, $C(1, m, 1)$ y $D(m, -1, 2m)$ pertenezcan a un mismo plano.

115. Calcula el valor de a para que los puntos $A(3, 0, 2)$, $B(0, a, a)$, $C(1, 2, 2)$ y $D(-1, -1, 0)$ sean coplanarios.
Para este valor hallado, calcula la ecuación del plano que contiene a los cuatro puntos.

116. Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} x - kz = 2 \\ y - z = -3 \end{cases} \qquad s: \frac{x-1}{2} = y + 1 = z$$

¿Existe algún valor de k que provoque que estas rectas sean secantes?

117. Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} x + y - z = -6 \\ 2x - z = -2 \end{cases} \qquad s: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+1}{2}$$

Estudia sus posiciones relativas según los valores de m.

Cuestiones

118. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Dos rectas paralelas determinan un único plano.

b) Desde un punto exterior a una recta solo se puede trazar una paralela a ella.

c) Desde un punto exterior a una recta solo se puede trazar una perpendicular a ella.

d) Dos rectas que se cruzan no forman ningún ángulo.

e) Dadas dos rectas que se cruzan y un punto exterior a ellas, solo hay una recta que pase por ese punto y toque a las dos rectas.

119. Dado un plano y uno de sus puntos:

a) ¿Cuántas rectas se pueden trazar que estén contenidas en el plano y que pasen por el punto?

b) ¿Cuántas rectas se pueden trazar que sean perpendiculares al plano y que pasen por el punto?

Problemas

120. Dado el plano π: $6x + 4y - 3z - D = 0$:

a) Calcula el valor de D para que el plano pase por el punto $P(2, 0, 0)$.

b) Calcula las coordenadas de A, B y C, que son los puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano π.

c) Calcula las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices A, B y C.

d) Calcula las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices A, B y C.

121. Dos de los vértices de un triángulo son los puntos $A(-2, 1, 3)$ y $B(2, -1, 4)$. El baricentro es $G\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3\right)$. Calcula las coordenadas del tercer vértice C.

122. Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(3, 1, -1)$ y $B(2, 0, 3)$, y es paralelo a la recta de ecuación:

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{4}$$

123. Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-2, -3, 2)$ y es paralelo a las rectas:

$$r: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-4} \qquad s: \begin{cases} x = 2+3t \\ y = t \\ z = -1-t \end{cases}$$

124. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, -3, 0)$ y es paralela a la recta que es intersección de los planos:

$$\pi: 2x - 3y + z = 0 \qquad \pi': \begin{cases} x = 1+t+s \\ y = t-s \\ z = 2+2t+s \end{cases}$$

125. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-1, 1, -2)$ y es perpendicular a la recta $r: \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

126. Halla la ecuación de la recta perpendicular al plano $\pi: 2x - y + 2z - 1 = 0$ y que pasa por el punto $P(-1, 0, 3)$.

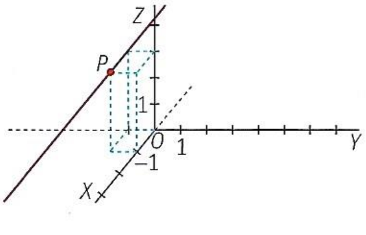
127. Halla la ecuación del plano paralelo al plano $\pi: -x + 2y + 3z - 4 = 0$ que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(1, -2, 3)$ y $B(-3, 4, -3)$.

128. Determina el plano perpendicular al segmento de extremos $A(2, -1, 0)$ y $B(-2, 2, -1)$ y que pasa por su punto medio.

129. Determina la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, -1, 1)$ y $B(0, 3, -2)$ y es paralelo al eje Z.

130. Determina la ecuación del plano paralelo a los ejes de coordenadas X e Y, y que pasa por el punto de intersección de la recta $r: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 3t \end{cases}$ con el plano $\pi: x + 2y - 2z + 3 = 0$.

131. Halla la ecuación de la recta de la figura.



132. Escribe la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s, donde:

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-2} = z \qquad s: \begin{cases} x = 2t \\ y = t+1 \\ z = t-1 \end{cases}$$

133. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0, 1, 3)$ y corta a las rectas siguientes. Para ello, estudia previamente la posición relativa que ocupan las dos rectas.

a) $r: \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1} \qquad s: \begin{cases} x-2y=-1 \\ 2x-2y-z=-2 \end{cases}$

b) $r: \begin{cases} x = t \\ y = 1+t \\ z = 2+t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x-y+z=2 \\ x+2y+z=8 \end{cases}$

134. Se considera la recta r que pasa por el punto $A(3, 0, 0)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{n} = (1, 1, -1)$. Se consideran, también, los planos paralelos de ecuaciones $\pi: 2x + y = 0$ y $\pi': 2x + y + 3 = 0$. La recta r determina un segmento PQ interior a los planos π y π'. Calcula las coordenadas del punto medio M de dicho segmento.

135. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-1, 2, 3)$ y que toca a los ejes de coordenadas X y Z.

136. Escribe una expresión algebraica que determine todos los planos que contienen a la recta:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$$

De todos los planos anteriores, escribe la ecuación del que pasa por el punto $B(-1, 0, 4)$.

137. Del paralelogramo $ABCD$ se conocen los vértices $A(-2, 0, 1)$, $B(1, -1, 2)$ y $C(4, 2, -3)$.

a) Calcula las coordenadas del cuarto vértice, D.

b) Calcula la ecuación del plano que contiene al paralelogramo.

c) Calcula las ecuaciones de las diagonales del paralelogramo.

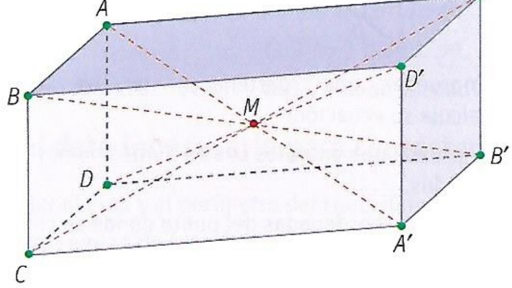
138. Dado el tetraedro de vértices $A(0, -1, 2)$, $B(1, 1, -1)$, $C(-1, 1, 2)$ y $D(-1, 0, 1)$:

a) Calcula las coordenadas de los puntos medios M, N, P y Q de sus aristas AB, AC, DC y DB.

b) Comprueba que los puntos M, N, P y Q son coplanarios.

c) Estudia la posición relativa de la recta que contiene a la arista AD y del plano que contiene a M, N, P y Q.

139. Tres de los vértices de un paralelepípedo $ABCDA'B'C'D'$ son los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(0, 2, 1)$ y $C(3, 2, -5)$.



a) Calcula las coordenadas del vértice D.

b) Sabiendo que todas las diagonales del paralelepípedo se cortan en el punto $M(1, 4, 1)$, calcula las coordenadas de los otros cuatro vértices de la figura.