RECUPERACIÓN CONTROL TEMA 9. 2º BACHILLERATO A

1. Estudia si la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 & si\ 1 < x \leq 2 \end{cases}$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle. En caso afirmativo, calcula el punto que lo verifica. (1,5 puntos)
2. Con una cuerda de 2 metros queremos construir un cuadrado de lado l y un círculo de radio r de modo que la suma de sus áreas sea mínima. ¿Cuánto deben medir l y r? (1 punto)
3. Calcula los siguientes límites:
   a. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - e^{-x} - x}{x\, senx}$
   b. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{\ln x}\right)$
   c. $\lim_{x\to \infty} (2^x - 1)^{\frac{2}{x+1}}$
   d. Halla a y b de modo que se cumpla $\lim_{x\to 0} \frac{sen\ 2x}{bx^3 + ax} = 4$ (3 puntos)
4. Calcula el valor de la derivada en el punto (3,-1) de la siguiente función:
   $5y^3 - 3y^2x + 2xy - 8x^2 + 5 = 0$ (1 punto)
5. Calcula las siguientes derivadas:
   a. $y = \left(\frac{tg(4x-6)}{\ln(3x^2-5x+2)}\right)^{e^{x^3-5x^2}}$
   b. $y = \sqrt[x+2]{\frac{e^{\cos 7x}}{sen(x^4-3x)}}$ (2 puntos)
6. Sea la función f(x)=$\begin{cases} x^2 + ax + b & si\ x < 2 \\ 2x & si\ \ x \geq 2 \end{cases}$ ¿Existen valores de a y b para los cuales f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0,4]$? Razona la respuesta y, en caso afirmativo, calcula dichos valores. (1,5 puntos)

TEMAS 8.9 2º BACH A

① $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$

Las dos funciones son continuas en su intervalo de definición, f_1 porque está definida para $x \geq 0$ y es radical. Y f_2 es polinómica.

- $\lim_{x \to 1^-} \sqrt{x} = 1$
  $=$
  $\lim_{x \to 1^+} -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 1$
  $\Rightarrow f$ continua en $[0,2]$
- $f(1) = 1$
- $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ -3x + \frac{7}{2} & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$ $\quad \begin{rcases} f'(1^-) = \frac{1}{2} \\ f'(1^+) = \frac{1}{2} \end{rcases} \Rightarrow f'(1^-) = f'(1^+)$

  f derivable en $(0,2)$

  f no derivable en $x=0$
- $\begin{rcases} f(0) = 0 \\ f(2) = 0 \end{rcases} \Rightarrow f(0) = f(2)$

$\begin{rcases} f \text{ continua en } [0,2] \\ f \text{ derivable en } (0,2) \\ f(0) = f(2) \end{rcases} \xRightarrow{\text{T. Rolle}} \exists c \in (0,2) \,/\, f'(c) = 0$

- Encontrar $c \Rightarrow f'(c) = 0$

  $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \nexists$

  $-3x + \frac{7}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{7}{6} \qquad \frac{7}{6} \in (0,2) \Rightarrow c = \frac{7}{6}$

② $4l + 2\pi r = 2 \Rightarrow l = \frac{2 - 2\pi r}{4} = \frac{1 - \pi r}{2}$

$A(r) = l^2 + \pi r^2 = \left(\frac{1 - \pi r}{2}\right)^2 + \pi r^2 = \frac{1 - 2\pi r + \pi^2 r^2 + 4\pi r^2}{4}$:

$A'(r) = \frac{1}{4}\left(-2\pi + 2\pi^2 r + 8\pi r\right) = 0 \longrightarrow r = \frac{2\pi}{2\pi^2 + 8\pi} = \frac{1}{\pi + 4} = 0{,}14$

$\begin{rcases} \left(0, \frac{1}{\pi+4}\right) & f'(x) < 0 \\ \left(\frac{1}{\pi+4}, 2\right) & f'(x) > 0 \end{rcases} \Rightarrow \text{Mín } r = \frac{1}{\pi + 4}$

Luego $l = \frac{1 - \pi r}{2} = \frac{1 - \pi \frac{1}{\pi + 4}}{2} = 0{,}28$

Las medidas son $l = 0{,}28$ m y $r = 0{,}14$ m

(3)

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - e^{-x} - x}{x \operatorname{sen} x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{sen} 2x + e^{-x} - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos 2x - e^{-x}}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = -\frac{5}{2}$$

$$b)\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{\ln x}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to 1} \frac{2x\ln x - 3(x-1)}{(x-1)\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2\ln x + 2x\frac{1}{x} - 3}{\ln x + (x-1)\cdot\frac{1}{x}} = \frac{-1}{0} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty \end{cases} \nexists \lim$$

$$c)\ \lim_{x\to\infty} (2^x - 1)^{\frac{2}{x+1}} = [\infty^0] = e^{2\ln 2}$$

$$\ln \lim_{x\to\infty} (2^x-1)^{\frac{2}{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x+1}\ln(2^x-1) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(2^x-1)}{x+1} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot\frac{2^x\ln 2}{2^x-1}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2^{x+1}\cdot\ln 2}{2^x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2^{x+1}\ln 2}{2^{x+1}}}{\frac{2^x}{2^{x+1}} - \frac{1}{2^{x+1}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln 2}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{x+1}}} = 2\ln 2$$

$$d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{bx^3 + ax} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{3bx^2 + a} = \frac{2}{a} = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b \in \mathbb{R}$$

(4)

$$5y^3 - 3y^2 + 2xy - 8x^2 + 5 = 0$$

$$15y^2y' - 6yy'x - 3y^2 + 2y + 2xy' - 16x = 0$$

$$y' = \frac{3y^2 - 2y + 16x}{15y^2 - 6yx + 2x} \longrightarrow y'(3,-1) = \frac{53}{39}$$

(5)

$$a)\ \ln y = e^{x^3-5x^2}\cdot \ln\left(\frac{\operatorname{tg}(4x-6)}{\ln(3x^2-5x+2)}\right)$$

$$\frac{y'}{\cancel{y}} = \Bigg[(3x^2-10x)e^{x^3-5x^2}\ln\left(\frac{\operatorname{tg}(4x-6)}{\ln(3x^2-5x+2)}\right) + e^{x^3-5x^2}\cdot\frac{\ln(3x^2-5x+2)}{\operatorname{tg}(4x-6)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left[(1+\operatorname{tg}^2(4x-6))\cdot 4\cdot\ln(3x^2-5x+2) - \operatorname{tg}(4x-6)\cdot\frac{6x-5}{3x^2-5x+2}\right]}{\ln^2(3x^2-5x+2)}\Bigg]\cdot\left(\frac{\operatorname{tg}(4x-6)}{\ln(3x^2-5x+2)}\right)^{e^{x^3-5x^2}}$$

$$b)\ \ln y = \frac{1}{x+2}\ln\left(\frac{e^{\cos 7x}}{\operatorname{sen}(x^4-3x)}\right)$$

$$\frac{y'}{\cancel{y}} = \Bigg[-\frac{1}{(x+2)^2}\cdot\ln\left(\frac{e^{\cos 7x}}{\operatorname{sen}(x^4-3x)}\right) + \frac{1}{x+2}\cdot\frac{\operatorname{sen}(x^4-3x)}{e^{\cos 7x}}\cdot\frac{(-7\operatorname{sen} 7x\, e^{\cos 7x})\operatorname{sen}(x^4-3x)}{\operatorname{sen}^2(x^4-3x)}$$

$$\frac{- e^{\cos 7x}\cos(x^4-3x)\cdot(4x^3-3)}{\operatorname{sen}^2(x^4-3x)}\Bigg]\cdot\sqrt[x+2]{\frac{e^{\cos 7x}}{\operatorname{sen}(x^4-3x)}}$$

(6) $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x<2 \\ 2x & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

$\lim_{x\to 2^-} x^2+ax+b = 4+2a+b$ $\left\{ \begin{array}{l} 4+2a+b=4 \\ 2a+b=0 \end{array} \right.$

$//$

$\lim_{x\to 2^+} 2x=4$

$f(2)=4$

$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si } x<2 \\ 2 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

$\left. \begin{array}{l} f'(2^-)=4+a \\ \qquad // \\ f'(2^+)=2 \end{array} \right\} 4+a=2 \rightarrow \boxed{a=-2}$

Para $a=-2$ f es derivable luego continua.

$2a+b=0 \Rightarrow -4+b=0 \rightarrow \boxed{b=4}$

$\left. \begin{array}{l} f \text{ cont en } [0,4] \text{ por ser f. polinómica} \\ f \text{ der. } (0,4) \text{ por ser polinómica} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{TVM}]{} \exists c\in(0,4) / f'(c)=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}$

$f'(c)=\frac{8-4}{4}=1$

Para calcular c

$2x+a=1 \rightarrow 2x-2=1 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ Luego $c=\frac{3}{2}\in(0,4)$

$2\neq 1$ $\nexists$