

TEMA 1: 2º BACH B

① Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

a. Halla los valores de a y b para los que se cumple que $A+B+AB=C$

b. Calcula las matrices que conmutan con la matriz B siendo $b=1$

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 3b \\ -2a & ab-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 4b \\ -a & ab-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$-a = -1 \rightarrow \boxed{a=1}$; $4b=0 \rightarrow \boxed{b=0}$

b) $B \cdot M = M \cdot B$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2a+c & -2b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & a+b \\ -2c & c+d \end{pmatrix}$

$-2a+c = -2a \rightarrow c=0$

$-2b+d = a+b \rightarrow a=d-b$

$c = -2c \rightarrow c=0$

$d = c+d \rightarrow c=0$

$M = \begin{pmatrix} d-b & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad \forall b, d \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+3b \end{pmatrix}$

② Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{pmatrix}$

a. Estudia el rango de A en función del parámetro k

b. ¿Para qué valores de k la matriz es regular?

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+2F_3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2+2k & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2+2k)F_2-3F_3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4k-8 \end{pmatrix}$
 $4+4k-12$

$4k-8=0 \rightarrow k=2$

Si $k=2 \rightarrow \text{rg } A=2$

Si $k \neq 2 \rightarrow \text{rg } A=3$

b) La matriz es regular si $k \neq 2$.